

Chapitre 1 : Propriétés des fluides

1-1 Introduction Général

Cette branche de la mécanique englobe une variété de problèmes allant de l'étude de l'écoulement sanguin dans des capillaires déformables (vaisseaux sanguins de diamètre de quelques microns) à l'écoulement de pétrole brut dans des conduites de l'ordre du mètre de diamètre avec des longueurs pouvant aller jusqu'à 13 000 km. Les principes de la mécanique des fluides sont nécessaires pour expliquer pourquoi les avions volent et quel est le profil d'aile idéal pour avoir un vol le plus efficace possible en termes de coûts liés au kérosène et de vitesse d'avion alors que les balles de golf à aspérités servent à lancer la balle plus loin grâce au décollement tardif de la couche limite dans le cas d'un écoulement turbulent [1].

Bien que la structure moléculaire des fluides soit très importante afin de distinguer un fluide d'un autre, il n'est pas possible d'étudier le comportement de chaque molécule lorsqu'on essaie de décrire le comportement des fluides au repos ou en mouvement. On considère plutôt la valeur moyenne ou macroscopique de la quantité pour laquelle la moyenne est évaluée sur un petit volume contenant un grand nombre de molécules. Par exemple, lorsqu'on dit que la vitesse en un point donné vaut telle valeur, nous indiquons en fait une vitesse moyenne des molécules prise dans un petit volume entourant le point donné. Ce volume est en fait très petit comparé aux dimensions physiques du système étudié mais très grand comparé à la distance moyenne entre les molécules. Par exemple pour les gaz aux conditions standards, l'espacement entre les molécules est de l'ordre de 10^{-6} mm et pour les liquides il est de l'ordre de 10^{-7} mm. Par conséquent, le nombre de molécules par millimètre cube est de l'ordre de 10^{18} pour les gaz et 10^{21} pour les liquides. Il est alors clair que le nombre de molécules dans un volume minuscule est très grand et l'idée d'utiliser des valeurs moyennes sur ce petit volume est raisonnable. Nous supposons donc que toutes les grandeurs du fluide (pression, vitesse...) varient de façon continue dans le fluide, c'est-à-dire que l'on traitera le fluide comme un milieu continu. En revanche, cette hypothèse ne sera plus valide dans le cas des gaz raréfiés que l'on trouve, par exemple, dans les très hautes altitudes.

1-2 Définition d'un fluide :

Une question que l'on se pose souvent : quelle est la différence entre un solide et un fluide ? Nous avons en général une idée vague de cette différence. Un solide est « dur » et pas facile à déformer, tandis qu'un fluide est une matière molle et qui peut être facilement déformée (on peut très simplement bouger dans l'air). Mais ces explications des différences entre un solide et un fluide ne sont pas satisfaisantes d'un point de vue scientifique. Si l'on regarde ces matières d'un point de vue moléculaire (voir Figure 1.3), on s'aperçoit que le solide (acier, béton...) a des molécules rapprochées de façon très dense avec des *forces de cohésion* intermoléculaires très grandes et qui permettent au solide de maintenir sa forme initiale. En revanche, pour des liquides (eau, huile...), les molécules sont plus espacées, les forces intermoléculaires sont plus faibles que dans le cas des solides et les molécules ont la liberté de mouvement. Par conséquent les liquides peuvent être facilement déformés (sans avoir la possibilité d'être très fortement comprimés comme pour les gaz) mais peuvent, par exemple, être versés dans des récipients ou s'écouler dans un tube. Les gaz (air, oxygène...) ont un espace entre les molécules

encore plus grand et ont des forces intermoléculaires de cohésion extrêmement petites et par conséquent ils sont très facilement déformables et compressibles.

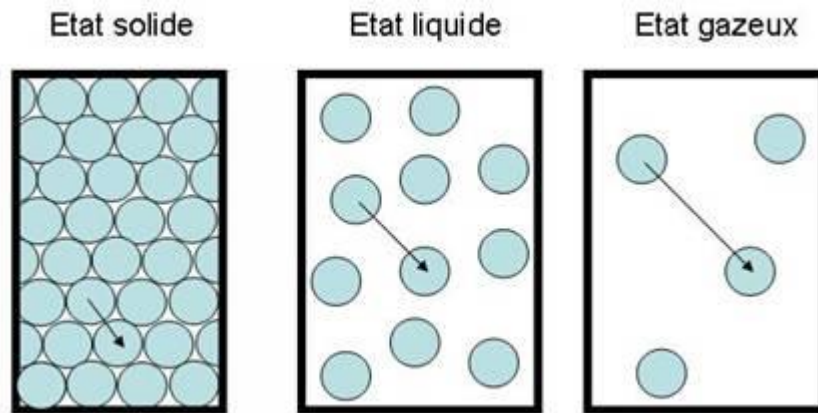


Figure 1.1 – Structures moléculaires.

1-2-1- Fluide incompressible

Un fluide est dit incompressible lorsque le volume occupé par une masse donnée ne varie pas en fonction de la pression extérieure. Les liquides peuvent être considérés comme des fluides incompressibles (eau, huile, etc.)

1-2-2- Fluide compressible

Un fluide est dit compressible lorsque le volume occupé par une masse donnée varie en fonction de la pression extérieure. Les gaz sont des fluides compressibles. Par exemple, l'air, l'hydrogène, le méthane à l'état gazeux, sont considérés comme des fluides compressibles.

Pour les liquides on distingue deux classes :

- Les fluides parfaits : un fluide parfait est un fluide dont les molécules glissent les unes sur les autres sans aucun frottement.
- Les fluides réels : un fluide réel est un fluide dont les molécules glissent les unes sur les autres sans avec frottement.

1-3- Matière divisée :

La matière existe sous l'une des trois formes classiques : solide, liquide ou gazeuse. Il existe des états qui, bien que n'étant pas les formes les plus stables de la matière, n'en constituent pas moins des états que le chimiste et le biochimiste sont susceptibles de rencontrer fréquemment. Parce qu'ils ont des propriétés particulières, il est important de bien les connaître et les reconnaître.

Quelles sont les lois qui gouvernent ces types d'états ?

Ces états ne constituent pas de nouvelles phases, mais bien plutôt un mode particulier de coexistence de phases. Ce sont les systèmes dispersés. Un système dispersé est formé d'au moins deux phases dont l'une est la **phase dispersante** : c'est un milieu continu parfois appelé extérieur. L'autre phase est la phase dispersée et elle est discontinue. Il peut exister plusieurs phases dispersées.

Rappelons qu'une solution vraie, à la limite, selon la définition tout juste donnée, est composée d'une phase dispersante et d'une ou plusieurs phases dispersées dont le diamètre moyen est inférieur à 1 nm. Ainsi, à l'échelle macroscopique on ne distingue qu'une phase unique.

Une **solution colloïdale** se rattache au système dispersé. Le diamètre moyen des particules dispersées est compris entre 1 nm et 1 μm . La phase dispersante est le **liquide micellaire** et la phase dispersée est formée de micelles. Le lait, la vinaigrette, ... sont des solutions colloïdales.

1-4- Classification

Il existe plusieurs façons de classer les systèmes dispersés. Pour sa simplicité et surtout parce qu'il permet de rattacher ces systèmes aux phases solide, liquide et gazeuse, on retiendra la classification selon la nature de la phase dispersante.

a- Dans les gaz.

- Lorsque la phase dispersée est un liquide, ce sont les nuages, les fumées, les brouillards, ...
- Lorsque la phase dispersée est un solide, ce sont les aérosols.

b- Dans les solides :

- Lorsque la phase dispersée est un gaz, ce sont les mousses solides comme la mousse isolante.
- Lorsque la phase dispersée est un liquide ce sont les émulsions solides comme la crème glacée et l'asphalte.
- Lorsque la phase dispersée est un solide, ce sont des dispersions solides. Exemple : plusieurs alliages.

c- Dans les liquides qui eux-mêmes se subdivisent en :

- Lorsque la phase dispersée est un gaz, ce sont les mousses liquides comme la mousse des extincteurs.
- Lorsque la phase dispersée est un liquide ce sont les émulsions comme le lait et la vinaigrette.
- Lorsque la phase dispersée est un solide, ce sont les sols. Exemple : certains types de peinture, les encres,...

1-4-1- Les sols

Les sols se séparent en deux catégories selon qu'ils sont réversibles (ou encore lyophobes) et irréversibles (ou encore lyophiles).

1-4-2- Les gels

On distingue aussi les gels : ce sont des dispersions colloïdales, donc des sols, aux propriétés particulières. Ces propriétés sont voisines des liquides très visqueux, voire des solides. Elles sont souvent caractérisées par :

- Leur déformation élastique : le module d'YOUNG (1773-1829)
- Leur écoulement plastique : le point de fluage
- Leur liquéfaction par agitation suivi d'une ré-gélification après repos. C'est la propriété de thixotropie.

1-4-3- Les suspensions solides

Ce sont donc des dispersions grossières de solides finement divisés dans un liquide. Le processus de stabilisation normal implique une sédimentation des particules solides. On peut appliquer à ces particules en cours de sédimentation la **loi de STOKES**. Leur mouvement descendant est soumis à deux forces opposées : la force de gravitation qui entraîne ces particules vers le bas et la force de viscosité qui freine leur déplacement. Notons que si c'est le cas général, il peut arriver aussi que le solide ait une densité plus faible que celle du liquide. Les résultantes des forces produisent alors un mouvement ascensionnel des particules solides (rappel de la **loi d'ARCHIMÈDE**) (Fig. 1-2).

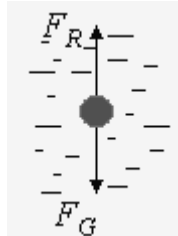


Figure 1-2 - Une particule dans un fluide.

1-4-4- Les émulsions

Les émulsions sont des dispersions de type liquide – liquide. Elles ressemblent aux dispersions colloïdales mais s'en différencient par la dimension des gouttelettes de liquide : ici entre 0,2 et 10 μm (parfois de 0,01 μm jusqu'à 100 μm). Les différences de densités sont en général faibles et les forces de friction sont élevées. Il s'ensuit que, même instables, elles évoluent lentement.

Considérons une éprouvette contenant quelques mL d'eau surmontée de quelques mL d'huile, par exemple 5 mL (5 cm^3). La surface de la région inter faciale est de l'ordre du cm^2 . La tension inter faciale est de l'ordre de 100 ergs.

En agitant vigoureusement l'éprouvette fermée, on provoque la formation de l'émulsion (Fig. 1-2).

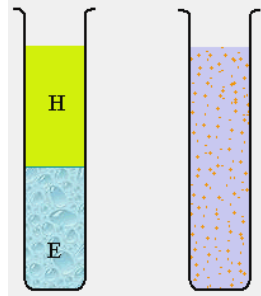


Figure 1-3 Formation d'une émulsion par agitation.

1-5- Forces de volume et force des surfaces appliqués à un domaine fluide

L'un des buts de la mécanique étant de définir la position ou le mouvement des particules matérielles sous l'action des forces qui les sollicitent, il faut donc définir le genre de forces que nous aurons à considérer en mécanique des fluides.

1-6- Force de volume : force de pesanteur

Les champs de force (de pesanteur, magnétique, électrique, etc.) exercent sur les particules fluides des actions à distance qui sont proportionnelles aux volumes des particules. Ce sont les forces de volume. Considérons un petit volume élémentaire dV et soit dF la force élémentaire qui s'exerce sur dV . On désigne par force volumique f (ou densité de force par unité de volume) la limite, si elle existe, de la quantité :

$$f = \lim_{dV \rightarrow 0} \frac{dF}{dV} \quad (1.1)$$

La densité des forces exercées par la gravité sur un milieu continu est l'un des exemples les plus classiques. C'est celle qui interviendra dans nos problèmes :

$$d\vec{F} = dm\vec{g} + \rho\vec{g}dV \quad (1.2)$$

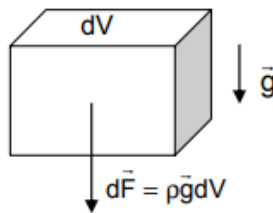


Figure 1-3 Les forces exercées sur le milieu continu

Par conséquent, la densité volumique de force à laquelle est soumis le fluide est $f = \rho g$

1-7- Forces de surface : force de pression et force de frottement

Imaginons une surface S fictive qui, au sein du fluide, sépare le fluide en deux domaines D_1 et D_2 . Les particules qui se trouvent du côté de D_2 , mais contiguës à S , agissent sur les particules de D_1 qui le touchent. Ce sont des actions à courte distance proportionnelles à l'aire de contact et on les appelle forces de surface. La force de pression : force normale La pression p est une grandeur scalaire (positive) définie en tout point du fluide. L'unité de pression dans le système international est le pascal ($\text{Pa} = \text{N/m}^2$). Cette unité étant faible (un pascal représente environ la pression exercée par un confetti posé sur votre main), on exprime les pressions en hectopascals (hPa), kilopascals (kPa) ou mégapascals (MPa).

Autres unités : $1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa}$; $1 \text{ atm} = 760 \text{ mm de Hg} = 760 \text{ torr} = 10,33 \text{ m d'eau} = 1,013 \cdot 10^5 \text{ Pa}$.

On se souvient des expériences élémentaires qui consistent à percer un petit trou dans un récipient rempli de liquide. On constate que, quelle que soit la forme du récipient et la position de l'orifice, le liquide jaillit toujours perpendiculairement à la paroi. On admet que ce qui a lieu sur la frontière du récipient se produit encore à l'intérieur. En d'autres termes, si S est une surface non matérielle, qui sépare un domaine D de fluide en deux sous-domaines D_1 et D_2 , alors le fluide dans D_2 exerce sur D_1 une force normale à S en tout point M de S , et vice versa, le fluide dans D_1 exerce sur D_2 une force égale et opposée, donc normale elle aussi à S (principe de l'action et de la réaction). Pour exprimer la force exercée par D_2 sur D_1 on introduit le vecteur unitaire \vec{n} orienté vers le milieu qui agit (ici D_2) et on écrit, pour un élément dS tracé sur S et entourant un point M de S :

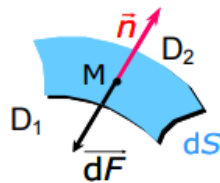


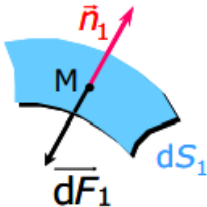
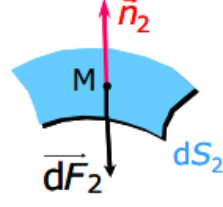
Figure 1-4 Forces de pression

$$d\vec{F} = -p\vec{n}dS \quad (1.3)$$

$d\vec{F}$: est la force exercée sur l'élément de surface dS

p est la pression régnant au point M

Par conséquent D_2 exerce sur D_1 , par l'intermédiaire de S , une densité surfacique de force (force par unité de surface) $-p\vec{n}$. La force de pression agit toujours vers l'intérieur du volume délimité par l'élément de surface. La pression est indépendante de la surface et de l'orientation de cette surface. Si on fait passer une autre surface S' par le point M , on obtient la même pression p . La notion de pression, totalement indépendante de la frontière du fluide (récipient), décrit les efforts exercés à l'intérieur du fluide par une partie D_2 sur son complémentaire D_1 . On dit que l'on a donné une description des efforts intérieurs (que les particules exercent les unes sur les autres).

	
$d\vec{F}_1 = -p_1 \vec{n}_1 dS_1$	$d\vec{F}_2 = -p_2 \vec{n}_2 dS_2$
$d\vec{F}_1 \neq d\vec{F}_2$ mais $p_1 = p_2$	

Les frottements : force tangentielle Il n'existe de contraintes tangentielles que si le fluide est visqueux (fluide réel) et en mouvement non uniformément accéléré. L'existence de contraintes tangentielles se manifeste par une résistance à l'écoulement. Cette force de frottement s'annule avec la vitesse. Pour un fluide au repos, la statique des fluides réels se confond avec la statique des fluides parfaits (non visqueux). Cette distinction n'apparaîtra qu'en dynamique des fluides. En résumé, il existe des forces de surface normales et tangentielles dans le cas suivant :

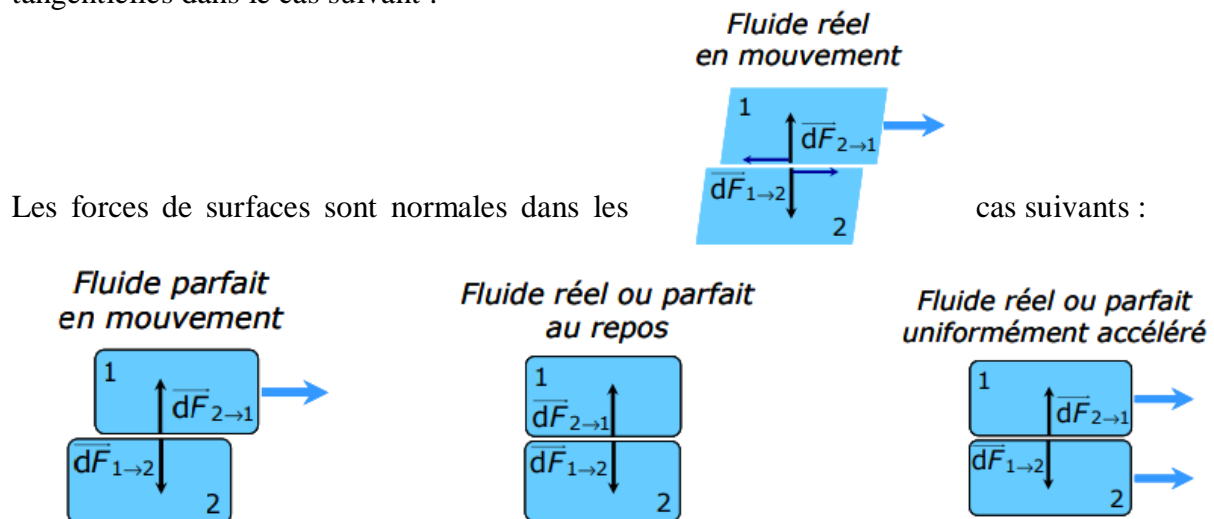


Figure 1-5 Forces de frottements

1-8- Propriétés d'un fluide :

1-8-1- La masse volumique « ρ » :

La masse volumique est le rapport entre la masse **m** d'une matière et son volume **v**. Généralement elle est exprimée en kg/m³. $\rho = m/v$

Pour les liquides la masse volumique varie très peu avec la pression, mais plus sensiblement avec la température. Les liquides sont appelés des fluides incompressibles. Contrairement à celle des liquides, la masse volumique des gaz varie avec la pression et la température. Les gaz sont appelés des fluides compressibles.

1-8-2- La densité «**d**» :

La masse volumique est le rapport entre la masse d'une matière et son volume.

Généralement elle est exprimée en kg/m³.

La densité d'un corps est le rapport entre la masse volumique de ce corps et la masse volumique d'un corps de référence. Les deux masses volumiques étant déterminées dans les mêmes conditions de température et de pression.

- Pour les liquides, cette définition se traduit par la relation suivante : $d_l = \frac{\rho}{\rho_{eau}}$

- Pour les gaz, cette définition se traduit par la relation suivante : $d_g = \frac{\rho}{\rho_{air}}$

NB : à T=20°C et pression atmosphérique (p= 1.013 bar) on :

$$\rho_{eau} = 1000 \text{ kg/m}^3 \quad \rho_{air} = 1,293 \text{ kg/m}^3$$

1-8-3- La viscosité :

On appelle viscosité la propriété qui traduit la résistance d'un fluide à l'écoulement. Elle caractérise les frottements internes ou intermoléculaires à l'intérieur du fluide. Plus la fluidité augmente (vitesse d'écoulement du fluide) plus la viscosité diminue et inversement.

On distingue deux types de viscosités, à savoir :

- La viscosité cinématique «v» :

Elle caractérise le temps d'écoulement d'un liquide. Par contre, la viscosité dynamique correspond à la réalité physique du comportement d'un fluide soumis à une sollicitation (effort). En d'autres termes, cette dernière exprime la « rigidité » d'un fluide à une vitesse de déformation en cisaillement

Exprimée en m²/s, Stocks (St) ou centiStocks (cSt).

Avec: 1 Stokes (St) = 100 CSt = 10⁻⁴ m²/s.

- La viscosité dynamique «μ» :

Elle exprime la proportionnalité entre la force qu'il faut exercer sur une plaque lorsqu'elle est plongée dans un courant et la variation de vitesse des veines de fluide entre les 2 faces de la plaque. ...Elle est exprimée par un coefficient représentant la contrainte de cisaillement nécessaire pour produire un gradient de vitesse d'écoulement d'une unité dans la matière. La viscosité dynamique est exprimée en Pascal seconde (Pa.s), Poise (Po) ou centiPoise (cPo).

Avec: 1 Po = 0,1 Pa.s et 1000 cP = 1 Pa.s.

* Relation entre la viscosité cinématique et la viscosité dynamique :

On a : $\mu = \rho \cdot \nu$

avec μ en Pa.s, ρ en kg/m³ et ν en m²/s

-Poids volumique (poids spécifique) : $\bar{\omega}$ (N/m³)

Il représente la force d'attraction exercée par la terre sur l'unité de volume, c'est-à-dire le poids de l'unité de volume.

$$\bar{\omega} = \rho \cdot g$$

APPLICATIONS

Exercice N°1 :

Déterminer le poids volumique de l'essence sachant que sa densité $d=0,7$.

On donne :

- L'accélération de la pesanteur $g=9,81 \text{ m/s}^2$
- La masse volumique de l'eau $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$

Réponse :

$$\bar{\omega} = d \cdot \rho \cdot g = 0,7 \cdot 1000 \cdot 9,81 = 6867 \text{ N/m}^3$$

Exercice N°2 :

Calculer le poids P_0 d'un volume $V=3$ litres d'huile d'olive ayant une densité $d=0,918$

Réponse :

$$P_0 = d \cdot \rho_{\text{eau}} \cdot V \cdot g \quad \text{A.N} \quad P_0 = 0,918 \cdot 1000 \cdot 3 \cdot 10^{-3} \cdot 9,81 = 27 \text{ N}$$

Exercice N°3 :

Déterminer la viscosité dynamique de l'huile d'olive sachant que sa densité est 0,918 et sa viscosité cinématique est 1,089 Stokes.

Réponse :

$$\mu = \rho \cdot \nu \quad \text{A.N} \quad \mu = 918 \cdot 1,089 \cdot 10^{-4} = 0,1 \text{ Pa.s}$$

Exercice N°3 :

Du fuel porté à une température $T=20^\circ\text{C}$ a une viscosité dynamique $\mu = 95 \cdot 10^{-3} \text{ Pa.s}$

Calculer sa viscosité cinématique ν en stockes sachant que sa densité est $d=0,95$. On donne la masse volumique de l'eau est $\rho_{\text{eau}} = 1000 \text{ kg/m}^3$

Réponse :

$$\nu = \frac{\mu}{\rho_{\text{eau}} \cdot d} \quad \text{A.N} \quad \nu = \frac{95 \cdot 10^{-3}}{1000 \cdot 0,95} = 1 \cdot \frac{10^{-4} \text{ m}^2}{\text{s}} = 1 \text{ stokes}$$

Exercice N°4:

Soit un volume d'huile $V= 6\text{m}^3$ qui pèse $G= 47\text{KN}$. Calculer la masse volumique, le poids spécifique et la densité de cette huile sachant que $g= 9.81 \text{ m/s}^2$. Calculer le poids G et la masse M d'un volume $V= 3$ litres d'huile de boîte de vitesse ayant une densité égale à 0.9

Réponse :

- Masse volumique

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{G}{g.V} = \frac{47.1000}{9,81.6} = 798,5 \text{ kg/m}^3$$

- Poids volumique

$$\bar{\omega} = \rho . g = 798,5 . 9,81 = 7833,3 \text{ N/m}^3$$

- Densité

$$d = \frac{\rho}{\rho_{ref}} = \frac{798,5}{1000} = 0,7985$$

- Poids

$$\bar{\omega} = \frac{G}{V} \Rightarrow G = \bar{\omega} . V = \rho . g . V = 0,9 . 10^3 . 9,81 . 3 . 10^{-3} = 26,48 \text{ N}$$

- Masse

$$M = \rho . V = 0,9 . 10^3 . 3 . 10^{-3} = 2,7 \text{ Kg}$$

Chapitre 2 : Statique des fluides

2-1- Introduction :

Lors d'une plongée sous-marine, on constate que la pression de l'eau augmente avec la profondeur. La pression d'eau exercée sur un sous-marin au fond de l'océan est considérable. De même, la pression de l'eau au fond d'un barrage est nettement plus grande qu'au voisinage de la surface. Les effets de la pression doivent être pris en considération lors du dimensionnement des structures tels que les barrages, les sous-marins, les réservoirs... etc. Les ingénieurs doivent calculer les forces exercées par les fluides avant de concevoir de telles structures. Ce chapitre est consacré à l'étude des fluides au repos. Les lois et théorèmes fondamentaux en statique des fluides y sont énoncés. La notion de pression, le théorème de Pascal, le principe d'Archimède et la relation fondamentale de l'hydrostatique y sont expliqués. Le calcul des presses hydrauliques, la détermination de la distribution de la pression dans un réservoir...etc., sont basés sur les lois et théorèmes fondamentaux de la statique des fluides [2].

2-2- Définition de la pression, pression en un point d'un fluide

2-2-1- Notions de pression

La pression exercée par une force F agissant perpendiculairement sur une surface S est :

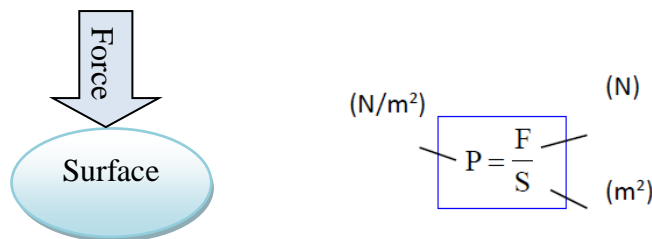


Figure 2-1 Force exercée sur une surface

Unité de pression :

Plusieurs unités existent :

- Le pascal (Pa) : unité SI, peu employée en pratique
- Le bar (bar) et son sous multiple le millibar (mbar)
- Le millimètre de mercure ou torr
- Le millimètre de colonne d'eau ou le mètre de colonne d'eau (m CE)
- L'atmosphère (atm)

La correspondance entre ces unités est la suivante :

$$1 \text{ bar} = 10^5 \text{ pa} = 1000 \text{ mbar} \approx 750 \text{ mm de mercure} \approx 10,2 \text{ m CE} \approx 0,987 \text{ atm}$$

Il existe trois types de pression d'un fluide à savoir :

1. La pression atmosphérique est la pression exercée par l'atmosphère à la surface de la terre. Au niveau de la mer cette pression est équivalente à celle exercée par une colonne d'environ 760mm de mercure. Elle varie tous les jours légèrement ; elle est néanmoins toujours voisine de 1 bar.
2. La pression absolue « p_{ab} »: comme son nom l'indique cette pression est toujours positive, la référence pour cette pression est 0. Dans le vide $p_{ab} = 0$ bar.
3. La pression effective « p_{eff} »: appelée aussi pression manométrique, elle peut être négative, positive ou nulle, la référence pour cette pression est p_{atm} . Dans le vide $p_{eff} = 0$ bar. On peut dégager la relation suivante entre les différentes formes de pression : $p_{ab} = p_{eff} + p_{atm}$

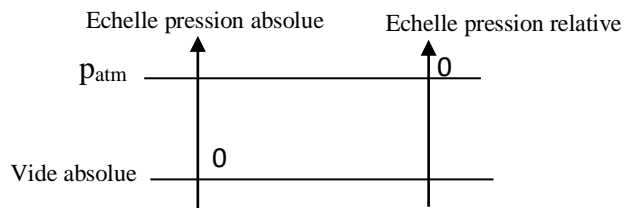


Figure 2-2 Echelle des pressions absolues et relatives

2-2-2- Notion de pression en un point d'un fluide :

La pression est une grandeur scalaire. C'est l'intensité de la composante normale de la force qu'exerce le fluide sur l'unité de surface. Elle est définie en un point A d'un fluide par l'expression suivante

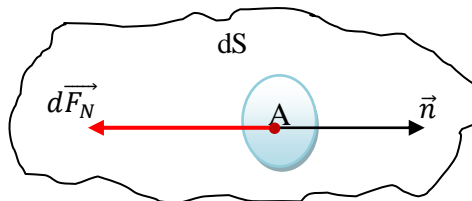


Figure 2-3 Pression exercée sur un fluide

$$P_A = \frac{\|d\vec{F}\|}{dS} \quad (2.1)$$

Où :

dS : Surface élémentaire de la facette de centre A (en mètre carré),

\vec{n} : Vecteur unitaire en A de la normale extérieure à la surface,

$d\vec{F}$: Composante normale de la force élémentaire de pression qui s'exerce sur la surface (en Newton),

P_A : pression en A (en Pascal), Sur la surface de centre A, d'aire dS , orientée par sa normale extérieure \vec{n} , la force de pression élémentaire $d\vec{F}$ s'exprime par :

$$d\vec{F}_N = -P_A \cdot dS \cdot \vec{n} \quad (2.2)$$

2-3- Loi fondamentale de statique des fluides

2-3-1- Equation général de l'hydrostatique :

On considère un liquide immobile à l'intérieur d'un récipient (Figure 2-4) ; la pression en tous les points du liquide situés sur un même plan horizontal est identique. Les points A et B étant sur une verticale, le principe s'écrit :

$$P_B - P_A = \rho \cdot g \cdot h \quad (2.3)$$

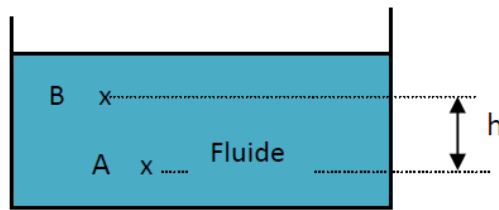


Figure 2-4 un récipient rempli d'un liquide immobile

- P_B, P_A : pression en B et A (kg/m.s^2) ou Pa)
- ρ : masse volumique du liquide (kg/m^3)
- g : accélération de la pesanteur (m/s^2)
- h : distance verticale entre A et B (m)

La différence de pression en Pa entre A et B est numériquement égale au poids d'une colonne de liquide de section unité 1m^2 et de hauteur h en m : on pourra dire que $P_B - P_A$ exprimée en pascals est donc égale à une pression d'une hauteur h de colonne de liquide de masse volumique ρ (kg/m^3). On peut toujours exprimer une pression avec une unité de hauteur après avoir précisé le liquide choisis.

Remarque :

- La relation de Bernoulli est une formulation plus générale qui prend en compte la statique des fluides.
- La pression dans un fluide homogène ne dépend que de la différence de la hauteur et de la masse volumique ; elle est notamment indépendante de la taille ou de la forme du récipient recueillant le fluide (figure 2.5). Cela a des conséquences importantes :
 - Pour une altitude donnée la pression est la même ;
 - La surface libre d'un fluide est plane (sauf si la tension de surface joue un rôle).

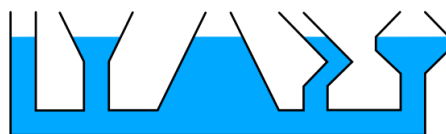


Figure 2.5. Pression indépendante de la forme du récipient

2-4- Transmission des pressions dans les liquides

2-4-1- Théorème de Pascal

Toute variation de pression en un point d'un liquide au repos est transmise intégralement à tous les autres points du liquide.

L'équation générale de l'hydrostatique entre A et B devient :

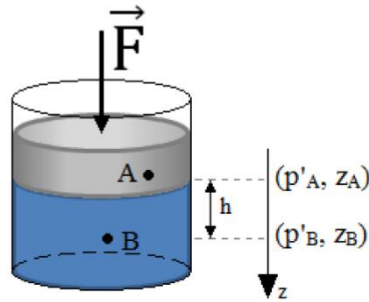


Figure 2-5 Théorème de Pascal

$$p'_B = p'_A + \rho \cdot g \cdot h \quad (2.4)$$

avec :

$$p'_A = p_A + \Delta p \rightarrow p'_B = p_A + \Delta p + \rho \cdot g \cdot h \quad (2.5)$$

or on a :

$$p_A + \rho \cdot g \cdot h = p_B \rightarrow p'_B = p_B + \Delta p \quad (2.6)$$

D'où on peut tirer le théorème de Pascal: Pour tout fluide incompressible en équilibre, la variation de la pression en un point se transmet intégralement en tout point du fluide.

2-4-2- Equilibre de deux fluides non miscibles

Un tube en U rempli d'un liquide de masse volumique (ρ_B), si dans l'une des branches un autre liquide non miscible au premier et de masse volumique (ρ_A) est versé, il est observé une dénivellation $h=(h_A-h_B)$ entre les deux liquides. Les deux surfaces libres étant à la pression atmosphérique. D'après le principe de Pascal, il est possible d'écrire les équations suivantes :

$$P_D = P_{atm} + \rho_B \cdot g \cdot (h_B - h_D) \quad (2.7)$$

$$P_C = P_{atm} + \rho_A \cdot g \cdot (h_A - h_C) \quad (2.8)$$

$$\rightarrow P_{atm} + \rho_A \cdot g \cdot (h_A - h_C) = P_{atm} + \rho_A \cdot g \cdot (h_A - h_C) \quad (2.9)$$

et puisque $h_D = h_C$ (même plan horizontal d'un même fluide)

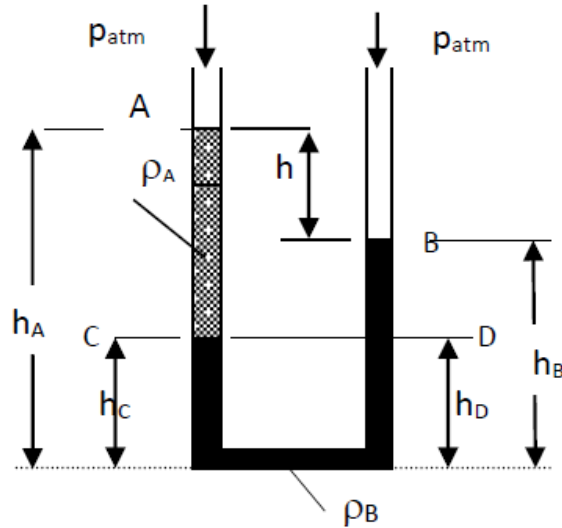


Figure 2.6 Tube en U rempli des liquides non miscibles

$$\rho_B \cdot g \cdot (h_B - h_D) = \rho_A \cdot g \cdot (h_A - h_C) \quad (2.10)$$

$$\rightarrow \rho_A = \rho_B \frac{h_B - h_D}{h_A - h_C} \quad (2.11)$$

La simple mesure des hauteurs des deux fluides permet de déterminer la masse volumique d'un fluide. De même ce concept est utilisé pour la mesure des pressions avec les manomètres à colonne de liquide ou manomètre différentiel.

2-4-3- Statique des gaz :

Les systèmes gazeux sont une illustration simple des cas dans lesquels la compressibilité du fluide ne peut être négligée. La masse volumique dépendant directement de la pression, celle-ci n'est évidemment plus indépendante de l'altitude z . Pour un gaz parfait, l'équation d'État donne : $P \cdot V = n \cdot R \cdot T$, d'où $P = n \cdot R \cdot T / V$. Or, la masse volumique dépend du volume V selon : $\rho = nM/V$, où M est la masse molaire du gaz. Il vient alors :

$$p = \rho \frac{R T}{M} \quad \text{Ou bien encore} \quad \rho = p \frac{M}{R T} \quad (2.12)$$

L'équation fondamentale de la statique des fluides conduit donc à l'équation différentielle suivante :

$$\frac{dp}{dz} = - \frac{M g}{R T} p \quad (2.13)$$

Où le rapport $(M g)/(R T)$ est une constante. Cette équation se résout en séparant les variables de la façon suivante :

$$\frac{dp}{p} = - \frac{M g}{R T} dz \quad (2.14)$$

Et en intégrant comme suit :

$$\ln p = -\frac{Mg}{RT}z + C^{te} \rightarrow p(z) = p_0 \exp\left(-\frac{Mg}{RT}z\right) \quad (2.15)$$

Où p_0 est la pression en $z=0$. Attention, cette solution n'est valable que pour une atmosphère isotherme, autrement dit lorsque la température T ne dépend pas de l'altitude z .

2-5- Enoncé du théorème : poussé d'Archimède

Tout corps plongé dans un fluide au repos, entièrement mouillé par celui-ci ou traversant sa surface libre, subit une force verticale, dirigée de bas en haut et opposée au poids du volume de fluide déplacé ; cette force est appelée poussée d'Archimède [3].

Remarques :

- 1- Si la masse volumique du solide est inférieure à celle du liquide ($\rho_s < \rho_L$): le solide flotte.
- 2- Si la masse volumique du solide est égale à celle du liquide ($\rho_s = \rho_L$): le solide est immergé et il reste en suspension dans le liquide.
- 3- Si la masse volumique du solide est supérieure à celle du liquide ($\rho_s > \rho_L$): le solide est immergé et il touche le fond du contenant du liquide.

Il est possible d'effectuer le calcul de la force hydrostatique s'exerçant sur une surface fermée, celle-ci délimitant un volume totalement ou partiellement immergé. Dans ce cas, la force est appelée **poussée d'Archimède**. Cette poussée s'exprime :

$$\vec{F} = \oint_S -p \vec{n} dS \quad (2.16)$$

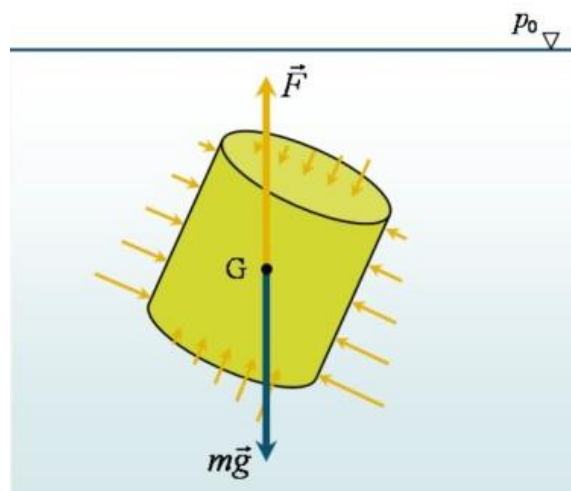


Figure 2.7 Poussée d'Archimède

Tirée de la formule d'Ostrogradski, la formule du gradient permet de transformer une intégrale surfacique en une intégrale volumique :

$$\oint_S f \vec{n} dS = \int_V \vec{\nabla} f dV \quad (2.17)$$

On peut donc ici remplacer la grandeur scalaire f par la pression p , ce qui donne :

$$\vec{F} = - \int_V \vec{\nabla} p dV \quad (2.18)$$

Or, le fluide étant au repos, l'équation fondamentale de la statique des fluides permet d'écrire que $\vec{\nabla} p = \rho \vec{g}$, d'où la nouvelle expression de la poussée d'Archimède :

$$\vec{F} = - \int_V \vec{\nabla} p dV \quad (2.19)$$

Et comme \vec{g} peut être considérée constante sur tout le volume, si le liquide est incompressible (ρ est aussi constant sur tout le volume) on obtient alors :

$$\vec{F} = - \rho \vec{g} \int_V dV = - \rho V \vec{g} \quad (2.20)$$

Autrement dit, la poussée d'Archimède est une force qui s'exerce dans la direction opposée à \vec{g} et dont l'intensité est égale au poids du liquide déplacé par le volume immergé (**figure 2.7**).

Ainsi, les conditions de flottaison (conditions d'équilibre) sont régies par la différence d'intensité entre les deux forces en présence (poids propre de l'objet immergé et poussée d'Archimède).

Sans en faire la démonstration, on admettra que le point d'application de la poussée d'Archimède est le barycentre du volume immergé.

2-6- Calcul des forces de pression : Plaque plane (horizontale, verticale, oblique) :

2-6-1 - Cas d'une paroi verticale

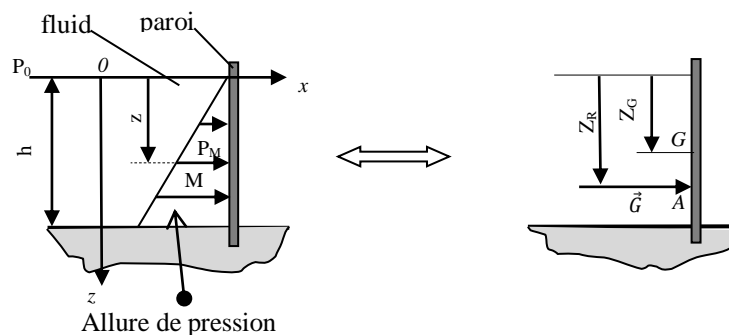


Figure 2-8 Forces de pressions sur une plaque plane

P_0 : pression à la surface du fluide

En appliquant la relation fondamentale de l'hydrostatique on obtient

$$P_M = P_0 + \rho g Z \quad (2.21)$$

Z : Profondeur

Z_R : Profondeur de la résultante \vec{R}

Z_G : profondeur du barycentre ou centre de gravité G de la surface S de contact paroi/fluide

ρ : masse volumique du fluide

$g = 9,81 \text{ m/s}^2$

S : aire de la paroi soumise à la pression du fluide

Si \vec{R} est la résultante des forces de pression exercées sur la paroi et Z_R sa position, on montre les relations :

$$R = \rho \cdot g \cdot S \cdot Z_G \quad (2.22) \quad \text{et} \quad Z_R = \frac{I_{yG}}{Z_G \cdot S} + Z_G \quad (2.23)$$

I_{yG} est le moment quadratique de la surface S par rapport à l'axe y_G (axe passant G et perpendiculaire à x et z)

2-6-2- Paroi plane inclinée

D'une façon générale, pour une paroi plane inclinée d'un angle α par rapport à l'horizontale, on démontrera que l'on a, puisque $h = x \sin \alpha$

$$X_A = \frac{\int_S x^2 dS}{\int_S x dS} = \frac{\int_S x^2 dS}{x_G S} \quad (2.24)$$

Etant l'abscisse OG du centre de gravité. L'intégrale située au numérateur est égale au moment d'inertie I de la paroi S par rapport à O. Le centre de poussée n'est pas confondu avec le centre de gravité, il est toujours situé en-dessous. Sa position A sur la plaque ne change pas avec α : A et G sont des points fixes.

2-6-3- Paroi oblique

Paroi courbée Les parois des ouvrages hydrotechnique qui subissent une pression hydrostatique peuvent être non seulement planes, mais également courbes, par exemples, les vannes secteurs, les parois des réservoirs d'eau en charge, etc. La force hydrostatique qui s'applique sur une surface courbée peut être obtenue par le calcul des composantes horizontales et verticale. Et l'intensité de la force F_R est obtenue ainsi : $F_R = \sqrt{F_H^2 + F_V^2}$
 Horizontalement : $F_H = F_V$

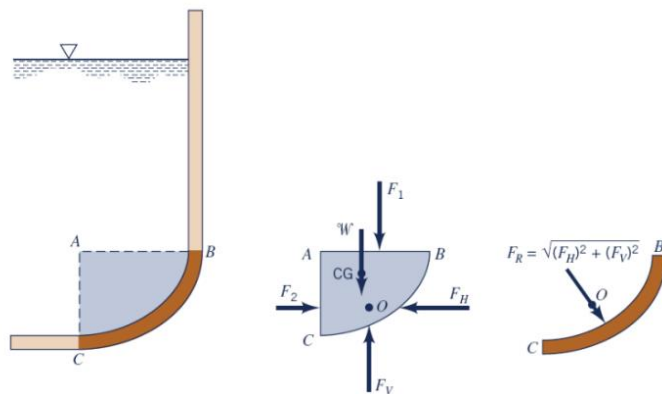


Figure 2-9 Force de pression hydrostatique sur une surface courbée

Verticalement : $F_V = F_I + W$ $F_H = \rho \cdot g \cdot h_c \cdot A_x$

Avec A_x : la surface de la projection d'une surface courbe sur un plan perpendiculaire à l'axe horizontal. Et h_c : est la profondeur d'immersion du centre de gravité de cette projection. La composante verticale est égale à : $W = \rho \cdot g \cdot V_p$ avec V_p : est le volume du corps de pression.

APPLICATIONS

Exercice N°1 :

La cuve ci-contre est à moitié pleine d'eau. Calculez la différence de pression entre les points A et B, puis entre les points B et C. Comparer ces résultats et conclure !

On donne :

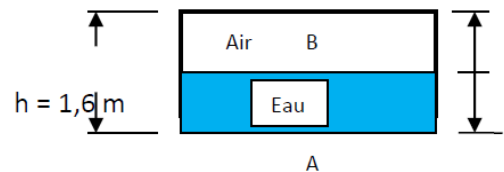
- Masse volumique de l'eau 10^3 kg/m^3
- Masse volumique de l'air 1.3 kg/m^3

Réponse :

$$\Delta P_{AB} = \rho_{\text{eau}} \cdot g \cdot (h_A - h_B) = \rho_{\text{eau}} \cdot g \cdot h/2 \quad \text{soit} \quad \Delta P_{AB} = 10^3 \cdot 9,81 \cdot 0,8 = 7\,848 \text{ Pa}$$

$$\Delta P_{BC} = \rho_{\text{air}} \cdot g \cdot (h_B - h_C) = \rho_{\text{air}} \cdot g \cdot h/2 \quad \text{soit} \quad \Delta P_{BC} = 1.3 \cdot 9,81 \cdot 0,8 = 10,2 \text{ Pa}$$

Conclusion : la pression dans l'eau est très supérieure devant la pression dans l'air

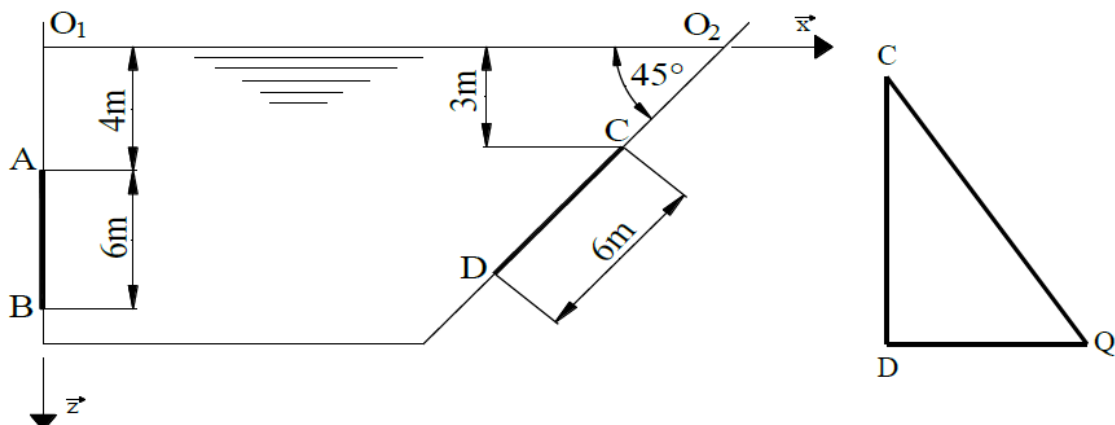


Exercice N°2 :

Soit le barrage de la figure ci-dessous comporte deux portes d'évacuation d'eau **AB** et **CD**, comme l'indique la figure. Connaissant que la porte en **AB** forme une surface rectangulaire de largeur **3 m** et la porte en **CD** forme une surface plane triangulaire de base **4m**.

- 1/ Calculer la résultante des efforts de pression \vec{R}_1 appliquée par l'eau sur la surface AB.
- 2/ Donner le centre de poussée de la résultante de pression \vec{R}_1 ; Z_{c1} .
- 3/ Calculer la résultante des efforts de pression \vec{R}_2 appliquée par l'eau sur la surface CD.
- 4/ Donner le centre de poussée de la résultante de pression \vec{R}_2 ; Z_{c2} .
- 5/ Calculer les deux composantes \vec{R}_{2x} et \vec{R}_{2z}
- 6/ Comparer \vec{R}_1 à \vec{R}_{2x} que peut-on dire ?

On donne : $IGy = \frac{b \cdot h^3}{36}$ d'un triangle rectangle, $\rho_{\text{eau}} = 1000 \text{ Kg/m}^3$



Réponse :

1/- Détermination de la résultante des efforts de pression \vec{R}_1 :

On a $\vec{R}_1 = -\rho \cdot g \cdot h_{G1} \cdot S_{AB} \vec{x}$ avec $h_{G1} = O_1 A + \frac{AB}{2}$ et $S_{AB} = AB \times 1$

D'où $R_1 = 840 \text{ KN}$.

2/- Détermination du centre de poussée de la résultante de pression \vec{R}_1 :

On a $Z_{C1} = \frac{I_{Gx}}{Z_{G1} \cdot S_{AB}} + Z_{G1}$ avec $I_{Gx} = \frac{l \cdot (AB)^3}{12}$ et $Z_{G1} = O_1 A + \frac{AB}{2}$ et $S_{AB} = AB \times 1$

D'où $Z_{C1} = 7,42 \text{ m}$.

3/- Détermination de la résultante des efforts de pression \vec{R}_2 :

On a $\vec{R}_2 = \rho \cdot g \cdot h_{G2} \cdot S_{CD} \vec{x}$ avec $h_{G2} = h_c + \frac{2CD}{3} \cdot \sin(45)$ et $S_{CD} = (CD \times DQ)/2$.

D'où $R_2 = 699,41 \text{ KN}$.

4/- Détermination du centre de poussée de la résultante de pression \vec{R}_2 :

On a $Z_{C2} = \frac{I_{G2}}{Z_{G2} \cdot S_{CD}} + Z_{G2}$ avec $I_{Gx} = \frac{b \cdot h^3}{36}$ et $Z_{G2} = Z_c + \frac{2CD}{3} \cdot \sin(45)$ et $S_{CD} = (CD \times DQ)/2$.

D'où $Z_{C2} = 6,17 \text{ m}$.

5/- Détermination des deux composantes \vec{R}_{2x} et \vec{R}_{2z} :

On a $\vec{R}_{2x} = \vec{R}_{2z} = \vec{R}_2 \times \sin(45)$

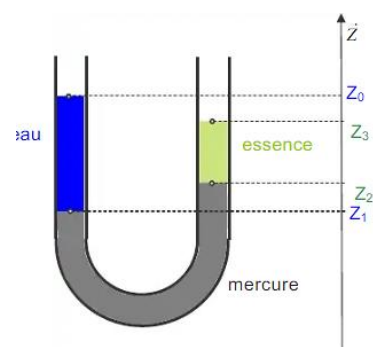
D'où $R_{2x} = R_{2z} = 494,55 \text{ KN}$.

Exercice N°3 :

On considère un tube en U contenant trois liquides :

- de l'eau ayant une masse volumique $\rho_1 = 1000 \text{ kg/m}^3$

- du mercure ayant une masse volumique $\rho_2 = 13600 \text{ kg/m}^3$



de l'essence ayant une masse volumique $\rho_3 = 700 \text{ kg/m}^3$

On donne :

$$Z_0 - Z_1 = 0,2 \text{ m}$$

$$Z_3 - Z_2 = 0,1 \text{ m}$$

$$Z_1 + Z_2 = 1,0 \text{ m}$$

On demande de calculer Z_0 , Z_1 , Z_2 et Z_3

Réponse :

D'après (RFH), chapitre 2, on peut écrire :

$$P_1 - P_0 = \rho_1 \cdot g \cdot (Z_0 - Z_1)$$

$$P_2 - P_1 = \rho_2 \cdot g \cdot (Z_1 - Z_2)$$

$$P_3 - P_2 = \rho_3 \cdot g \cdot (Z_2 - Z_3)$$

Puisque que $P_0 = P_3 = P_{\text{atm}}$, en faisant la somme de ces trois équations on obtient :

$$\rho_1 \cdot g \cdot (Z_0 - Z_1) + \rho_2 \cdot g \cdot (Z_1 - Z_2) + \rho_3 \cdot g \cdot (Z_2 - Z_3) = 0$$

$$\Rightarrow Z_2 - Z_1 = \frac{\rho_1}{\rho_2} (Z_0 - Z_1) - \frac{\rho_3}{\rho_2} (Z_3 - Z_2) \quad \text{A.N : } Z_2 - Z_1 = 0,0096 \text{ m}$$

$$\text{Or : } Z_1 + Z_2 = 1 \text{ m} \quad \text{donc : } Z_2 = 0,5048 \text{ m} \quad \text{et} \quad Z_1 = 0,4952 \text{ m}$$

$$Z_3 - Z_2 = 0,1 \text{ m} \quad \text{donc : } Z_3 = 0,6048 \text{ m}$$

$$Z_0 - Z_1 = 0,2 \text{ m} \quad \text{donc : } Z_0 = 0,6952 \text{ m}$$

Exercice N°4 :

La glace à -10°C a une masse volumique $\rho_{\text{glace}} = 995 \text{ kg/m}^3$. Un iceberg sphérique de 1000 tonnes flotte à la surface de l'eau. L'eau de mer a une masse volumique $\rho_{\text{eau}} = 1025 \text{ kg/m}^3$

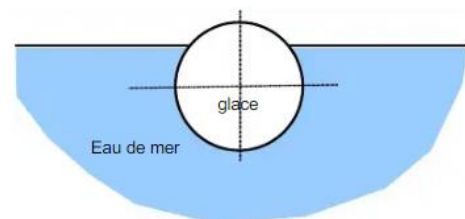
Travail demandé :

1) Déterminer la fraction F du volume immergée ?

2) Quelle sera F si la glace avait une forme cubique ?

Réponse :

1) Equation d'équilibre : $P_{\text{arch}} = \text{Poids} \Rightarrow \rho_{\text{glace}} \cdot g \cdot V_{\text{total}} = \rho_{\text{eau}} \cdot g \cdot V_{\text{immergé}}$



$$\text{Donc : } F = \frac{V_{\text{immergé}}}{V_{\text{total}}} \cdot 100 = \frac{\rho_{\text{glace}}}{\rho_{\text{eau}}} \cdot 100$$

$$F = \frac{995}{1025} \cdot 100 = 97\%$$

2) La fraction F ne dépend que du rapport des masses volumiques. Elle est indépendante de la forme. Donc F=97% si la forme était cubique

Chapitre 3 : Cinématique des fluides

3-1- Introduction :

Puisque la description d'un écoulement requiert nécessairement l'utilisation d'un certain nombre de grandeurs caractéristiques, il nous faut commencer par les définir précisément [4].

3-2- La particule fluide

C'est l'entité élémentaire choisie pour permettre une description complète des écoulements. Il s'agit d'un « **paquet de molécules** » entourant un point M donné de l'espace fluide. Ces molécules sont alors supposées avoir toute la même vitesse à chaque instant.

3-3- Description d'Euler

C'est une description de l'écoulement qui consiste à établir à un instant t donné l'ensemble des vitesses associées à chacun des points de l'espace fluide. Ainsi, à chaque point M est associé une vitesse $\vec{v}_M(t)$ susceptible d'évoluer dans le temps. L'écoulement du fluide est alors décrit au moyen d'un ensemble de vecteurs vitesse appelé « **champ de vecteurs vitesse** ». C'est donc une image instantanée de l'écoulement qui est utilisée.

Sur la base de ce champ de vecteurs vitesse, on définit comme « **ligne de courant** » la courbe qui en chacun de ses points est tangente au vecteur vitesse (**figure 3-1**). Au même titre que le champ de vecteurs vitesse, il s'agit donc d'une représentation au sein l'espace fluide susceptible d'évoluer dans le temps ; en conséquence, on prendra soin de dater les lignes de courant ainsi définies (ligne de courant passant par tel point à l'instant t).

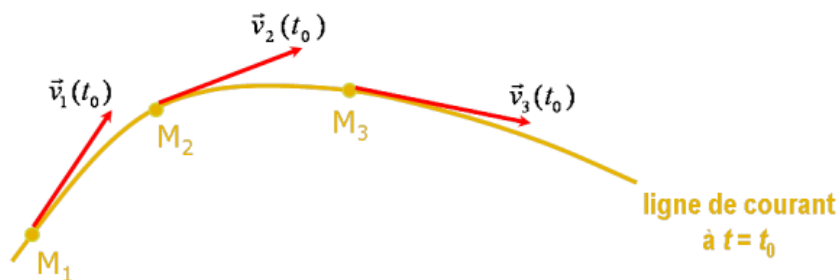


Figure 3-1 Lignes de courant

3-4- Description de Lagrange

Il s'agit d'une description de l'écoulement qui consiste à suivre dans l'espace fluide la position d'une particule choisie en fonction du temps. Il en découle la définition de la « **trajectoire** » d'une particule fluide : c'est l'ensemble des positions occupées successivement par une même particule (**figure 3-2**).

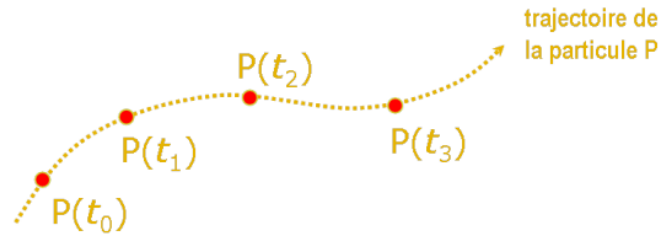


Figure 3-2 Trajectoire de la particule

Les deux descriptions, Euler et Lagrange, sont complémentaires et permettent souvent la conjugaison de deux approches différentes pour décrire un même écoulement. Pour faire une analogie avec le domaine de l'image et de la vidéo, il serait opportun de comparer la description d'Euler à un « arrêt sur image » d'une vidéo, et d'associer la description de Lagrange à une photo prise avec un temps de pose très long.

3-4-1- Ligne d'émission

Toutes les particules étant passées par un même point E sont situées à l'instant t sur une courbe appelée « **ligne d'émission** » relative au point E à l'instant t . La figure 3-3 explique cette définition qui n'a *a priori* rien de très intuitif. Toutefois, il s'agit d'une courbe qu'il est souvent très facile de mettre en évidence expérimentalement : l'exemple le plus explicite étant la source colorante au sein d'un écoulement de fluide translucide, où le filet coloré ainsi produit correspond à une ligne d'émission.

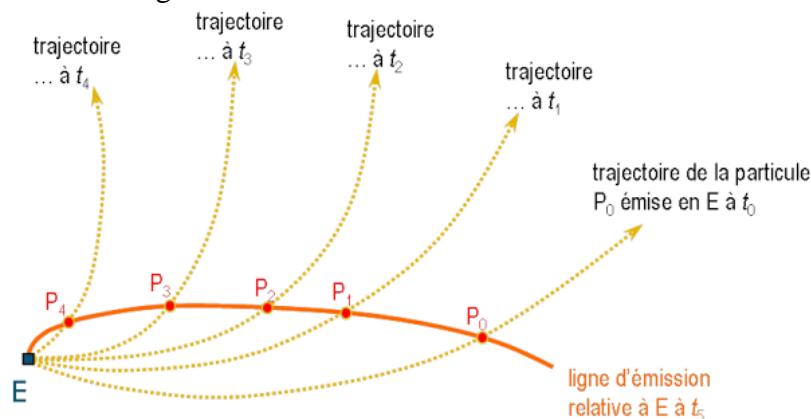


Figure 3-3 Ligne d'émission

3-4-2- Écoulement permanent

Un écoulement est qualifié de permanent (ou stationnaire) lorsque le champ de vecteurs vitesse de l'espace fluide qu'il occupe est statique : les vecteurs vitesse n'évoluent pas dans le temps. Les conséquences sont multiples :

- Les lignes de courant sont aussi statiques ;
- Les trajectoires coïncident avec les lignes de courant ;
- Les lignes d'émission coïncident également avec les lignes de courant.

Il n'y a donc plus aucune dépendance explicite avec le temps et les courbes précédemment définies et fondamentalement différentes coïncident dans l'espace fluide.

Remarque :

Tout écoulement non stationnaire est extrêmement difficile (voire souvent impossible) à décrire d'un point de vue purement analytique. Il ne sera donc question dans ce cours que de descriptions d'écoulements permanents.

3-5- Tenseur des déformations lois de comportement

Au sein de l'écoulement, chaque petit volume de fluide subit des changements de position, d'orientation et de forme. Ici on va introduire les éléments qui caractérisent ces changements. Pour cela, on va étudier la cinématique du changement de position d'un « petit volume » de fluide, sous l'hypothèse de « petits déplacements ». La nécessité d'une telle analyse n'est pas évidente a priori, mais nous verrons plus loin que les résultats obtenus ont une signification physique importante.

3-6- Dynamique des fluides Newtoniens

Les fluides dits « classiques » ou « newtoniens » qui est le cas de la majorité des fluides d'usage courant tels que l'eau, l'air ou l'huile. Ces fluides sont caractérisés par des comportements rhéologique et thermique particuliers. En effet, le tenseur des taux de cisaillement (décrivant les contraintes de cisaillement tangentielles) et le vecteur courant de chaleur s'expriment linéairement respectivement en fonction du tenseur des taux de déformations (caractérisant la vitesse de déformation) et du vecteur gradient de la température. Les équations locales décrivant la dynamique de ces fluides sont appelées les équations de Navier-Stokes (voir chapitre 6).

3-7- Position du problème - Démarche de fermeture

En pratique, l'écoulement d'un milieu fluide susceptible d'effectuer des échanges thermiques avec le milieu extérieur est totalement décrit par la donnée des champs eulériens des variables hydrodynamiques : La vitesse v et la pression p , ainsi que le champ de la température T . La description eulérienne de ces grandeurs est obtenue par l'intégration des équations locales de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie établies dans les chapitres précédents (dans le domaine de l'écoulement et en tenant compte des conditions aux limites correspondantes). On ces équations récapitulent comme suit :

Conservation de la masse

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho v) = 0 \quad (3.1)$$

Conservation de la quantité de mouvement

$$\rho \left[\frac{\partial v}{\partial t} \right] + v \cdot \nabla v = \rho f - \nabla p + \nabla \cdot t \quad (3.2)$$

Conservation de l'énergie

$$\rho \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{v^2}{2} + e \right) + v \cdot \nabla \left(\frac{v^2}{2} + e \right) \right] = \rho f \cdot v + \nabla \cdot (\sigma \cdot v) - \nabla \cdot q + \rho r \quad (3.3)$$

Bilan de l'énergie cinétique

$$\frac{\partial e_c}{\partial t} + v \cdot \nabla e_c = \rho f \cdot v + \nabla \cdot (\sigma \cdot v) - \tau : (\nabla v) \quad (3.4) \quad \text{avec } e_c = \frac{1}{2} \rho v^2$$

Bilan de l'énergie interne

$$\rho \left[\frac{\partial e}{\partial t} + v \cdot \nabla e \right] = -\nabla \cdot q + \rho \cdot r + \tau : (\nabla v) \quad (3.5)$$

Dans ce système d'équations, le bilan de l'énergie cinétique est déduit à partir de celui de quantité de mouvement. D'autre part le bilan de l'énergie interne n'est autre que la différence entre et. Ce système est par conséquent formé par 3 équations indépendantes. Le problème ainsi formulé reste ouvert : il contient plus d'inconnues que d'équations. En effet, une comptabilisation des inconnues mises en jeu montre que l'on ait 9 inconnues répertoriées comme suit :

- Vitesse : v
- Pression : p
- Température : T
- Masse volumique : ρ
- Densité massique des forces à distance : f
- Densité massique de la puissance calorifique rayonnée : r
- Tenseur des taux de cisaillement : τ
- Vecteur courant de chaleur : q
- Densité massique de l'énergie interne : e

Si on désire maintenir la vitesse v , la pression p et la température T comme inconnues principales, on serait amené à fermer ce système par l'introduction de 6 équations complémentaires (en nombre égal aux inconnues restant). Comme ce système est valable pour des milieux fluides de natures très différentes, les équations complémentaires qu'on doit ajouter doivent préciser la constitution particulière de chaque milieu : ce sont les lois constitutives. D'autre part, dans la plupart des cas d'applications, les densités massiques des forces à distance f et de la puissance calorifique r sont à priori connues (f s'identifie à l'accélération de pesanteur g dans un repère Galiléen et r est décrite par la loi de Stéphane). Ainsi, les lois constitutives devront exprimer ρ , e , τ et q en fonction de v , p et T .

3-8- Lois constitutives pour un fluide Newtonien

3-8-1. Loi constitutive de fermeture du tenseur des taux de cisaillement τ déduite de la rhéologie

Du point de vue de la mécanique, la différence entre un fluide réel et un fluide parfait réside dans l'absence dans le cas de fluide parfait de tout effort de cisaillement. Ceci implique que [5] :

- A l'échelle microscopique les particules fluides glissent les unes sur les autres sans frottement entre elles.
- A l'échelle macroscopique les contraintes de contact se réduisent aux contraintes de pression qui s'exercent perpendiculairement à la surface extérieure. Ce comportement se manifeste particulièrement en présence de parois solides. En effet, aux points de contact entre un fluide parfait en écoulement et une paroi (étanche), seule la composante normale à la paroi de la vitesse de l'écoulement est nulle. Les conditions d'écoulement à la paroi sont alors des conditions de glissement. Cependant, les conditions à la paroi qui régissent l'écoulement d'un

fluide réel sont des conditions d'adhérence : la vitesse aux points de contact entre le fluide réel et la paroi est égale à la vitesse de la paroi.

3-8-2. Écoulements irrotationnels et potentiel des vitesses

Un écoulement est qualifié d'irrotationnel lorsque les particules fluides ne subissent pas de rotation pure. Rappelons que ce tenseur antisymétrique est constitué des composantes du vecteur tourbillon $\vec{\Omega}$ et qu'en conséquence ce dernier doit être nul en tout point de l'écoulement :

$$\vec{\Omega} = \begin{pmatrix} \Omega_x \\ \Omega_y \\ \Omega_z \end{pmatrix} = \vec{0} \quad (3.6)$$

Puisque le vecteur tourbillon n'est autre que le rotationnel du vecteur vitesse $\vec{\Omega} = \frac{1}{2} \vec{\nabla} \wedge \vec{v}$, il en résulte qu'un écoulement irrotationnel doit vérifier :

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{v} = \vec{0} \quad (3.7)$$

Or, quelle que soit la fonction scalaire φ , la relation mathématique $\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \varphi) = \vec{0}$ est toujours vraie. Donc, par identification de \vec{v} avec $\vec{\nabla} \varphi$, on peut définir le champ de vecteurs vitesse d'un écoulement à partir de la seule fonction scalaire φ , que l'on nommera désormais **potentiel des vitesses**. Il en résulte que les composantes du vecteur vitesse s'expriment en fonction des dérivées partielles du potentiel des vitesses :

$$v_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad v_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z} \quad (3.8)$$

Sur la base des mêmes hypothèses que celles posées pour définir la fonction de courant, supposons que l'écoulement soit conservatif en plus d'être irrotationnel : dans ces conditions, on doit vérifier l'équation de continuité sous sa forme : $\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$; ce qui conduit à :

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0 \Rightarrow \Delta \varphi = 0 \quad (3.9)$$

On en conclut que le potentiel des vitesses doit vérifier l'équation de *Laplace*.

Remarque

Si l'écoulement est irrotationnel, la fonction de courant doit également vérifier l'équation de Laplace. En effet, on a :

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \partial \Psi / \partial y \\ -\partial \Psi / \partial x \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0} \Rightarrow -\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = 0 \Leftrightarrow \Delta \Psi = 0 \quad (3.10)$$

3-8-3. Propriétés du potentiel des vitesses

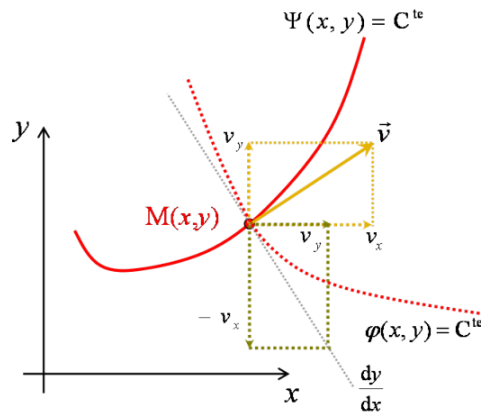


Figure 3-4 Courbe équipotentielle

Au sein d'un écoulement plan, l'équation $\varphi(x, y) = Cte$ définit une courbe qu'on nommera « **équipotentielle** ». Le potentiel des vitesses étant constant le long d'une telle courbe, on doit vérifier $d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy = 0$. Or, $v_x = \frac{\partial \varphi}{\partial y}$ et $v_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}$, d'où $v_x dx + v_y dy = 0$ devant être vérifiée en tout point de l'équipotentielle. Autrement formulé, on a :

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{v_x}{v_y} \quad (3.11)$$

ce qui signifie qu'en chacun de ses points, la courbe est orthogonale au vecteur vitesse (voir figure 3-4). Il en résulte par ailleurs que les équipotentielles sont partout orthogonales aux lignes de courant. La figure 4-5 illustre cette propriété à partir d'un exemple d'écoulement plan où les lignes de courant sont représentées en traits pleins et les équipotentielles en traits pointillés.

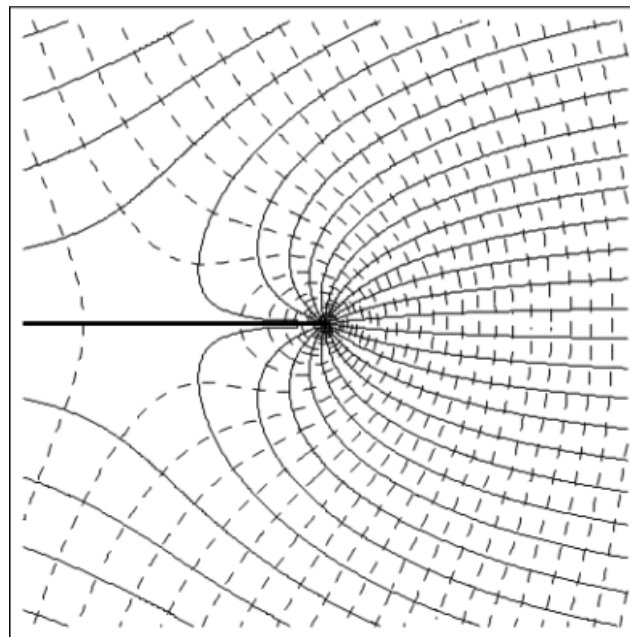


Figure 3-5 Champs de vitesse

La signification physique de ces équipotentiellles se comprend à travers le calcul de la longueur d'un élément d'arc le long d'une ligne de courant entre deux équipotentiellles (voir **figure 3-4**). Si les deux équipotentiellles sont infiniment proches, on peut considérer que leurs deux constantes respectives diffèrent d'une quantité élémentaire $d\varphi$ (l'une est de constante φ , l'autre de constante $\varphi + d\varphi$). Si on note ds la longueur de l'élément d'arc, il peut se décomposer en $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$.

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy = v_x dx + v_y dy \quad (3.12)$$

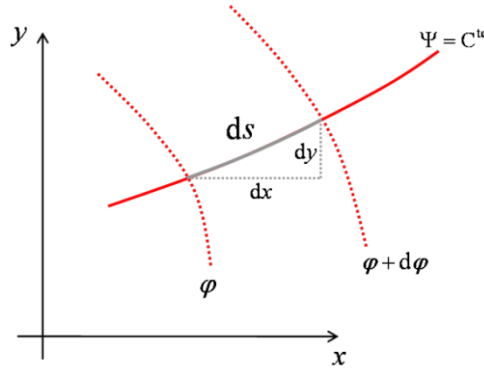


Figure 3-6 Courbe équipotentielle

Par ailleurs, on a déjà établi que, avec localement le long de la ligne de courant $\frac{dy}{dx} = -\frac{v_x}{v_y}$, d'où $dy = \frac{v_y}{v_x} dx$ et donc $d\varphi = v_x dx + \frac{v_y}{v_x} dx = \frac{v_x^2 + v_y^2}{v_x} dx = \frac{v^2}{v_x} dx$. On obtient de même $d\varphi = \frac{v^2}{v_y} dy$, et on en déduit que : $dx = \frac{v_x}{v^2} d\varphi$ et $dy = \frac{v_y}{v^2} d\varphi$. Ainsi, la longueur de l'élément d'arc se reformule :

$$ds = \sqrt{\left(\frac{v_x}{v^2} d\varphi\right)^2 + \left(\frac{v_y}{v^2} d\varphi\right)^2} = \sqrt{\frac{v_x^2 + v_y^2}{v^4}} d\varphi^2 \quad (3.12)$$

soit : $ds = \frac{d\varphi}{v}$

Ce résultat permet de statuer sur le fait que la distance entre deux équipotentiellles est inversement proportionnelle à la vitesse locale de l'écoulement. L'exemple de la figure 3-6 illustre bien qu'en choisissant un écart $\Delta\varphi$ constant entre les équipotentiellles tracées, un resserrement de celles-ci traduit une accélération de l'écoulement, alors qu'à l'inverse un espacement traduit une décélération. On comprend alors l'intérêt de représenter, en plus des lignes de courant, les équipotentiellles qui permettent d'avoir une vision complète de l'écoulement en termes d'évolution spatiale des vitesses.

3-8-4. Définition et contexte

Lorsqu'un écoulement plan est conservatif et irrotationnel, il peut être complètement décrit au moyen d'une fonction analytique complexe appelée « **potentiel complexe des vitesses** ». Cette fonction complexe $f(z)$ comporte une partie réelle correspondant au potentiel des vitesses $\varphi(x,y)$ et une partie imaginaire correspondant à la fonction de courant $\Psi(x,y)$. On définit ainsi :

$$f(z) = \varphi + i\Psi \quad \text{Ou} \quad z = x + iy = re^{i\theta}$$

Remarque

La définition d'une telle fonction analytique est légitime dans la mesure où le potentiel des vitesses et la fonction de courant vérifient les relations de *Cauchy* : $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \Psi}{\partial y}$ et $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}$.

L'intérêt de l'utilisation du potentiel complexe des vitesses est double :

- il réunit en une seule fonction les deux fonctions descriptives de l'écoulement ;
- il permet la construction d'écoulements évolués par simple superposition d'écoulements élémentaires :

$$f(z) = f_1(z) + f_2(z) + \dots \quad (3.13)$$

Écoulement uniforme

Considérons l'écoulement plan dont le potentiel complexe des vitesses se formule :

$$f(z) = U z \quad (3.14)$$

Où U est une constante réelle.

Par identification des parties réelle et imaginaire avec respectivement le potentiel des vitesses et la fonction de courant, on obtient :

$$\begin{aligned} f(z) = U(x+iy) = \varphi + i\Psi &\Rightarrow \varphi(x,y) = Ux \\ \Psi(x,y) &= Uy \end{aligned} \quad (3.15)$$

Les lignes de courant sont alors définies par $\Psi = Cte \Leftrightarrow Uy = Cte$, d'où $y = Cte \forall x$: il s'agit donc de droites horizontales (toutes parallèles à l'axe x). Tandis que les équipotentiels sont définies par $\varphi = Cte \Leftrightarrow Ux = Cte$, d'où $x = Cte \forall y$: il s'agit alors de droites verticales (toutes parallèles à l'axe y). Comme il se doit, on remarque que les lignes de courant sont de fait orthogonal aux équipotentiels.

On peut par ailleurs en déduire le champ de vecteurs vitesse en utilisant soit la fonction de courant, soit le potentiel des vitesses :

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \Psi}{\partial y} = U \\ v_y &= \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} = 0 \end{aligned} \quad (3.16)$$

D'où $\vec{v} = U\vec{e}_x$ en tout point de l'écoulement, correspondant à un écoulement uniforme de vitesse U selon l'axe x , comme le montre la figure 3-7.

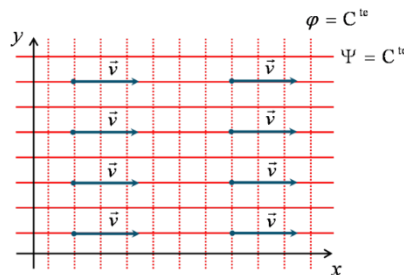


Figure 3-7 Ecoulement uniforme

Remarque

L'utilisation d'une constante U complexe permet d'orienter l'écoulement uniforme selon une direction quelconque.

Écoulement plan autour d'une source ou d'un puits

Considérons l'écoulement plan dont le potentiel complexe des vitesses se formule :

$$f(z) = C \ln z \quad (3.17)$$

Où C est une constante réelle.

Pour faciliter le traitement mathématique, il conviendra de travailler préférentiellement en coordonnées cylindriques ; ainsi : $z = re^{i\theta}$ et $f(z) = C \ln(re^{i\theta}) = C \ln r + i C \theta = \varphi + i\Psi$, où l'on peut identifier le potentiel des vitesses (partie réelle) et la fonction de courant (partie imaginaire) :

$$\begin{aligned} \varphi(r, \theta) &= C \ln r \\ \Psi(r, \theta) &= C \theta \end{aligned} \quad (3.18)$$

Les lignes de courant sont telles que $\Psi(r, \theta) = C \theta = Cte \Leftrightarrow \theta = Cte \forall r$, autrement dit il s'agit de droites passant toutes par l'origine du repère. Les équipotentiels doivent vérifier que $\varphi(r, \theta) = C \ln r = Cte \Rightarrow r = Cte \forall \theta$: il s'agit de cercles tous centrés sur l'origine du repère.

On vérifie bien ainsi qu'en tout point de l'écoulement les équipotentiels sont orthogonales aux lignes de courant. Par ailleurs, le champ de vecteurs vitesse s'obtient en calculant :

$$\begin{aligned} v_r &= \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \\ &\Rightarrow v_r = \frac{C}{r} \\ v_\theta &= 0 \quad \text{d'où} \quad \vec{v} = \frac{C}{r} \vec{e}_r \end{aligned} \quad (3.19)$$
$$v_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = -\frac{\partial \Psi}{\partial r}$$

On a donc un écoulement radial, centré sur l'origine du repère, où la vitesse est inversement proportionnelle à la distance à l'origine (voir figure 3-8). On remarquera que selon le signe de la constante C , l'écoulement peut être divergent ou convergent : si $C > 0$ alors l'écoulement est divergent et correspond à l'effet d'une source à l'origine ; si $C < 0$, l'écoulement est convergent et correspond à l'effet d'un puits à l'origine.

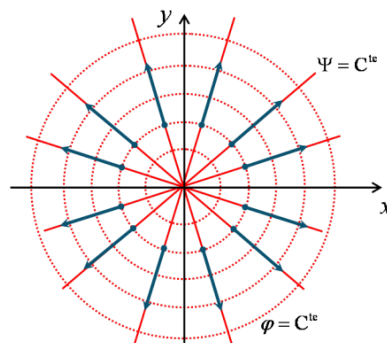


Figure 3-8 Ecoulement radial

La signification physique de la constante C est en rapport avec le débit généré par cette source ou ce puits. Pour s'en rendre compte, calculons le débit volumique de l'écoulement radial à travers un cylindre d'axe Oz (perpendiculaire au plan de l'écoulement), de rayon r , et de hauteur $\Delta z = l$. L'écoulement ayant lieu à travers la surface latérale du cylindre, on peut calculer :

$$q_v = \iint_S \vec{v} \cdot \vec{n} \cdot dS = \int_0^{2\pi} \vec{v} \cdot \vec{n} \cdot r \cdot d\theta \cdot \Delta z \quad (3.20)$$

Où $\vec{n} = \vec{e}_r$ et $\vec{v} = C/r \vec{e}_r$.

On obtient donc :

$$q_v = \int_0^{2\pi} \frac{C}{r} \cdot r \cdot d\theta = 2\pi C \quad \forall r \quad (3.21)$$

Ainsi, indépendamment du cylindre choisi, la constante C est égale, à 2π près, au débit généré par la source ou le puits. C'est la raison pour laquelle on formule communément l'écoulement généré par un puits ($q_v < 0$) ou une source ($q_v > 0$) par :

$$f(z) = \frac{q_v}{2\pi} \ln z \quad (3.22)$$

Où q_v est le débit volumique par unité de hauteur de l'écoulement plan (en $m^2.s^{-1}$).

Remarque

Cette formulation vaut pour un puits ou une source centrée à l'origine du repère. On peut très bien envisager un écoulement centré en un point quelconque du plan, de coordonnées $z_0 = x_0 + iy_0$, en formulant simplement $f(z) = \frac{q_v}{2\pi} \ln(z - z_0)$.

Vortex ou tourbillon libre

Considérons l'écoulement plan dont le potentiel complexe des vitesses se formule :

$$f(z) = -i C \ln z \quad (3.23)$$

Où C est une constante réelle.

Une nouvelle fois, il est plus approprié de travailler dans un système de coordonnées cylindriques.

Développons cette fonction pour identifier le potentiel des vitesses et la fonction de courant :

$$f(z) = -i C \ln(re^{i\theta}) = C \theta - i C \ln r = \varphi + i\Psi$$

D'où :

$$\begin{aligned} \varphi(r, \theta) &= C \theta \\ \Psi(r, \theta) &= -C \ln r \end{aligned} \quad (3.24)$$

Les lignes de courant sont telles que $\Psi(r, \theta) = -C \ln r = Cte \Rightarrow r = Cte \quad \forall \theta$, autrement dit il s'agit de cercles tous centrés sur l'origine du repère. Les équipotentiels doivent vérifier que $\varphi(r, \theta) = C \theta = Cte \Rightarrow \theta = Cte \quad \forall r$: il s'agit de droites passant toutes par l'origine du repère. On vérifie encore qu'en tout point de l'écoulement les équipotentiels sont orthogonales aux lignes de courant. Par ailleurs, le champ de vecteurs vitesse s'obtient en calculant :

$$v_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \quad (3.25)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad v_r &= 0 & \text{D'où } \vec{v} &= \frac{C}{r} \vec{e}_\theta \\ v_\theta &= \frac{C}{r} \\ v_\theta &= \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = -\frac{\partial \Psi}{\partial r} \end{aligned} \quad (3.26)$$

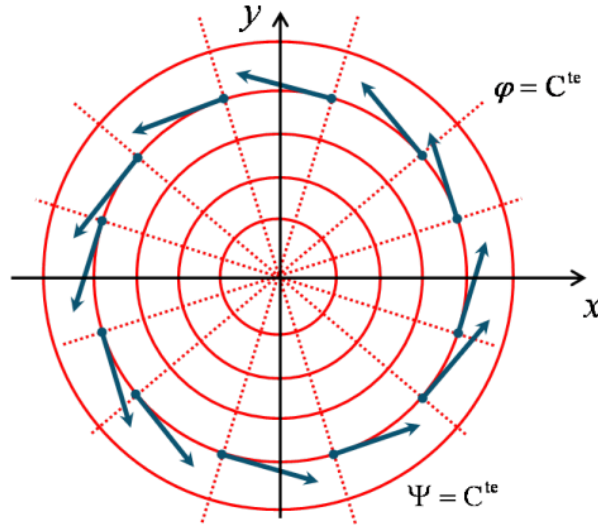


Figure 3-9 Ecoulement orthoradial

On a donc un écoulement orthoradial, tournant autour de l'origine du repère, où la vitesse est inversement proportionnelle à la distance à l'origine (voir figure 3-9). On notera la différence avec l'écoulement radial généré par un puits ou une source : les lignes de courant et les équipotentiels sont inter-changées. Par ailleurs, le signe de la constante C définit le sens de rotation : si $C > 0$ le vortex tourne dans le sens trigonométrique ; si $C < 0$, il tourne dans le sens horaire.

La signification physique de la constante C est en rapport avec la circulation du vecteur vitesse autour de l'origine du vortex. Pour le comprendre, calculons la circulation du vecteur vitesse le long d'une ligne de courant définie par un cercle de rayon r centré sur l'origine ; on a ainsi :

$$\Gamma = \oint_C \vec{v} d\vec{l} = \int_0^{2\pi} \vec{v} r d\theta \vec{e}_\theta = \int_0^{2\pi} \frac{C}{r} r d\theta = 2\pi C \forall r \quad (3.27)$$

On en déduit que la circulation est une propriété intrinsèque du vortex. En conséquence, on formulera plus communément le potentiel complexe des vitesses correspondant à un vortex en faisant apparaître sa circulation :

$$f(z) = -i \frac{\Gamma}{2\pi} \ln z \quad (3.28)$$

Où $\Gamma > 0$ le fait tourner dans le sens trigonométrique et $\Gamma < 0$ dans le sens horaire.

Remarque

Cette formulation vaut pour un vortex tournant autour de l'origine du repère. On peut très bien envisager un vortex tournant autour d'un point quelconque du plan, de coordonnées $z_0 = x_0 + iy_0$, en formulant simplement $f(z) = -i\frac{\Gamma}{2\pi} \ln(z - z_0)$.

Doublet et dipôle

Considérons l'association d'un puits et d'une source au sein d'un même écoulement plan. Positionnons la source de débit $+q$ en $(x = +a, y=0)$ et le puits de débit $-q$ en $(x = -a, y=0)$. Il s'agit alors de l'écoulement généré par un « **doublet** ». Puisque la superposition d'écoulements élémentaires s'opère par simple addition de leurs potentiels complexes des vitesses, l'association du puits et de la source se formule par :

$$f(z) = +\frac{q}{2\pi} \ln(z - a) - \frac{q}{2\pi} \ln(z + a) \quad (3.29)$$

Le traitement mathématique de cette fonction est simplifié en faisant appel à deux systèmes de coordonnées ; définissons alors deux repères cylindriques tels que :

$$\begin{aligned} z_1 &= z - a = r_1 e^{i\theta_1} \\ z_2 &= z + a = r_2 e^{i\theta_2} \end{aligned} \quad (3.30)$$

et reformulons $f(z)$ en conséquence :

$$f(z) = \frac{q}{2\pi} (\ln z_1 - \ln z_2) = \frac{q}{2\pi} (\ln r_1 + i\theta_1 - \ln r_2 - i\theta_2) = \frac{q}{2\pi} (\ln \frac{r_1}{r_2} + i(\theta_1 - \theta_2)) \quad (3.31)$$

Par identification de la partie réelle avec le potentiel des vitesses et de la partie imaginaire avec la fonction de courant, on obtient :

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{q}{2\pi} \ln \frac{r_1}{r_2} \\ \psi &= \frac{q}{2\pi} (\theta_1 - \theta_2) \end{aligned} \quad (3.32)$$

Par définition, les lignes de courant sont telles que $\psi = Cte$ et conduisent à tracer des courbes vérifiant : $\alpha = \theta_1 - \theta_2 = Cte$. La figure 3-10 montre alors que de telles courbes sont des cercles passant par l'origine du puits et l'origine de la source et ayant comme centre un point de l'axe y . Sans faire le calcul du champ de vecteurs vitesse, on oriente intuitivement le parcours des particules fluides en constatant logiquement que l'écoulement diverge depuis la source et converge vers le puits.

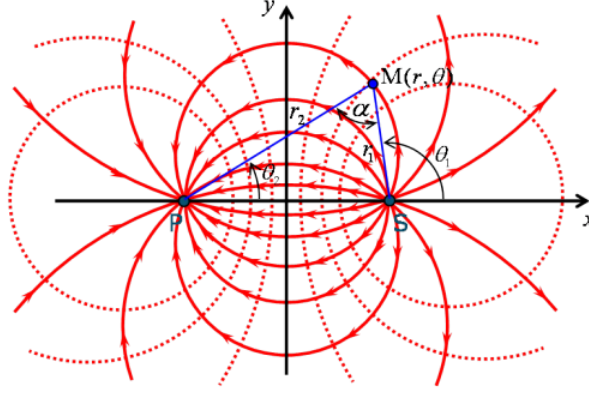


Figure 3-10 Doublet et dipôle

Remarque

Intervertir les positions de la source et du puits ne change que le sens de parcours des particules le long des lignes de courant, ces dernières restant inchangées. Par ailleurs, les équipotentiels étant orthogonales en tout point aux lignes de courant, on comprend graphiquement (voir figure 3-10) qu'elles prennent la forme de cercles centrés sur l'axe x .

Faisons tendre à présent vers zéro la distance entre le puits et la source : $2a \rightarrow 0$. Dans ces conditions, on superpose le puits et la source à l'origine, en créant ainsi un « **dipôle** ». Il convient alors de reformuler la fonction complexe dans un système de coordonnées unique :

$$f(z) = \frac{q}{2\pi} \ln(z - a) - \frac{q}{2\pi} \ln(z + a) = \frac{q}{2\pi} \ln\left(\frac{z-a}{z+a}\right) = \frac{q}{2\pi} \ln\left(\frac{z(1-\frac{a}{z})}{z(1+\frac{a}{z})}\right) = \frac{q}{2\pi} \ln\left(\frac{1-a/z}{1+a/z}\right) \quad (3.33)$$

et comme $\lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{1+a/z} = 1 - a/z$ au premier ordre, on approxime :

$$f(z) \approx \frac{q}{2\pi} \ln\left(1 - \frac{a}{z}\right)^2 \approx \frac{q}{2\pi} 2 \ln\left(1 - \frac{a}{z}\right) \approx \frac{q}{2\pi} 2 \left(-\frac{a}{z}\right) = -\frac{1}{2\pi} \frac{2aq}{z} \quad (3.34)$$

Posons alors $p = 2aq$ le moment dipolaire caractérisant ce dipôle. Il en résulte la formulation suivante pour le dipôle :

$$f(z) = -\frac{1}{2\pi} \frac{p}{z} \quad (3.35)$$

Où p est une constante, qui peut être considérée complexe et permettre ainsi d'orienter à loisir le dipôle dans le plan de l'écoulement.

Faisons l'hypothèse d'un moment dipolaire réel positif et étudions l'écoulement qui en résulte. Il convient logiquement de travailler une fois encore dans un repère cylindrique et de développer $f(z)$ pour identifier la fonction de courant et le potentiel des vitesses :

$$f(z) = -\frac{1}{2\pi} \frac{p}{r e^{i\theta}} = -\frac{1}{2\pi} \frac{p}{r} e^{-i\theta} = -\frac{1}{2\pi} \frac{p}{r} (\cos \theta - i \sin \theta) = \varphi + i\Psi \quad (3.36)$$

D'où :

$$(3.37)$$

$$\varphi(r, \theta) = -\frac{1}{2\pi} \frac{p}{r} \cos \theta$$

$$\Psi(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \frac{p}{r} \sin \theta$$

Une ligne de courant devant vérifier $\Psi = Cte$, son équation se formule : $\frac{\sin \theta}{r} = Cte$. Montrons alors qu'il s'agit de l'équation d'un cercle :

$$\frac{\sin \theta}{r} = Cte \Leftrightarrow r \sin \theta = Cte r^2 \Leftrightarrow y = Cte (x^2 + y^2) \Leftrightarrow x^2 + y^2 - Cte y = 0 \quad (3.38)$$

Appelons D la constante et poursuivons :

$$x^2 + y^2 - D y = 0 \Leftrightarrow x^2 + (y - D/2)^2 = (D/2)^2 \quad (3.39)$$

Où l'on reconnaît l'équation d'un cercle de rayon $D/2$ et de centre se trouvant à $D/2$ sur l'axe y . Ainsi, à chaque valeur différente de D correspond une ligne de courant prenant la forme d'un cercle passant par l'origine et dont le centre se trouve sur l'axe y (voir figure 3-11). On remarquera que, logiquement, les équipotentielles sont aussi des cercles passant par l'origine mais dont les centres se trouvent sur l'axe x .

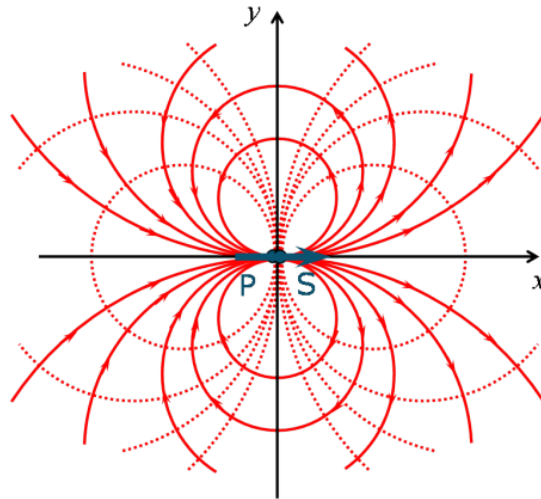


Figure 3-11 les Equipotentiellles

Remarque

Les écoulements élémentaires présentés ici peuvent ensuite être associés pour former des écoulements plus évolués et susceptibles de décrire des situations concrètes. L'exemple le plus typique étant la superposition d'un écoulement uniforme avec un dipôle qui conduit à la description d'un écoulement autour d'un cylindre. Ce même cylindre peut ensuite être considéré en rotation autour de son axe en introduisant un vortex : l'analyse des vitesses au contact de la paroi du cylindre montre alors que la répartition des pressions (par simple application l'équation de Bernoulli) est à l'origine d'une force qui s'exerce perpendiculairement à la direction de l'écoulement uniforme. Il s'agit de la portance générée par l'effet

APPLICATIONS

Exercice N°1

Vitesse dans le repère lagrangien Dans un écoulement 1D, la vitesse en un point est donnée dans le système Eulérien par : $u = x + t$. Déterminer le déplacement d'une particule fluide qui a sa position initiale x_0 à l'instant initial t_0 dans le système lagrangien.

Réponse :

$$u = \frac{dx}{dt} = x + t$$

La solution de l'équation ci-dessus est : $x = Ae^t - t - 1$

La constante A peut être déterminée par les conditions initiales :

$$x_0 = Ae^{t_0} - t_0 - 1 \Rightarrow A = \frac{x_0 + t_0 + 1}{e^{t_0}}$$

Par conséquent : $x = (x_0 + t_0 + 1)e^{(t-t_0)} - t - 1$

Cette dernière équation est la version lagrangienne de la particule fluide satisfaisant $x = x_0$ à $t = t_0$

Exercice N°2 :

Écoulement de jet sur une plaque Un fluide parfait incompressible s'écoule selon l'axe vertical Oz . En régime permanent, le champ des vitesses en coordonnées cylindriques est de la forme : $\vec{U} = 2kr \vec{e}_r + k'z \vec{e}_z$

1. Exprimer la constante k' en fonction de la constante k . Par la suite, les résultats ne devront faire intervenir que la constante k .
2. Montrer que l'écoulement considéré est irrotationnel.
3. Déterminer le vecteur accélération \vec{a} en chaque point $M(r, \theta, z)$ de l'écoulement.
4. Déterminer le potentiel des vitesses $\Phi(r, z)$ et calculer son laplacien.
5. Déterminer l'équation des lignes de courant et tracer leur allure.
6. Montrer que le caractère incompressible du fluide peut s'écrire : $\frac{\partial}{\partial r}(rU_r) = -\frac{\partial}{\partial z}(rU_z)$. En déduire, d'après le théorème de Schwartz, la fonction de courant $\psi(r, z)$, dont le gradient est perpendiculaire au gradient de Φ .
7. Vérifier que les courbes $\psi(r, z) = Cste$, s'identifient aux lignes de courant. Justifier.

Réponse :

1. On a :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{U} = \frac{1}{r} \frac{\partial(rU_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial U_z}{\partial z} = \frac{4kr}{r} + k' = 0 \text{ dans le cas d'un fluide incompressible. Donc } k' = -4k \text{ et } \vec{U} = 2kr\vec{e}_r - 4kz\vec{e}_z$$

2. On calcule le rotationnel en coordonnées cylindriques :

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{U} = \begin{cases} \frac{1}{r} \left[\frac{\partial U_z}{\partial \theta} - \frac{\partial(rU_\theta)}{\partial z} \right] = 0 \\ \frac{\partial U_r}{\partial z} - \frac{\partial U_z}{\partial r} = 0 \\ \frac{1}{r} \left[\frac{\partial(rU_\theta)}{\partial z} - \frac{\partial U_r}{\partial \theta} \right] = 0 \end{cases}$$

L'écoulement est donc bien irrotationnel.

3. Par définition :

$$\vec{a} = (\vec{U} \cdot \vec{\nabla}) \vec{U} = \vec{\nabla} \left(\frac{U^2}{2} \right) + \vec{\text{rot}} \vec{U} \wedge \vec{U}$$

$$\text{Or } U = \sqrt{4k^2 r^2 + 16k^2 z^2} = 2k\sqrt{r^2 + 4z^2} \Rightarrow \frac{U^2}{2} = 2k^2(r^2 + 4z^2)$$

$$\text{De plus } \vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{\partial}{\partial z} \vec{e}_z$$

$$\text{D'où } \vec{\nabla} \left(\frac{U^2}{2} \right) = 4k^2 r \vec{e}_r + 16k^2 z \vec{e}_z = 4k^2 (r \vec{e}_r + 4z \vec{e}_z) \text{ et donc :}$$

$$\vec{a} = 4k^2 (r \vec{e}_r + 4z \vec{e}_z)$$

$$4. \text{ Comme } \vec{\text{rot}} \vec{U} = \vec{0} \Rightarrow \exists \phi \text{ tel que } \vec{U} = \vec{\nabla} \phi \Rightarrow \begin{cases} 2kr = \frac{\partial \phi}{\partial r} & (1) \\ 0 = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} & (2) \\ -4kz = \frac{\partial \phi}{\partial z} & (3) \end{cases}$$

$$(2) \Rightarrow \phi = \phi(r, z)$$

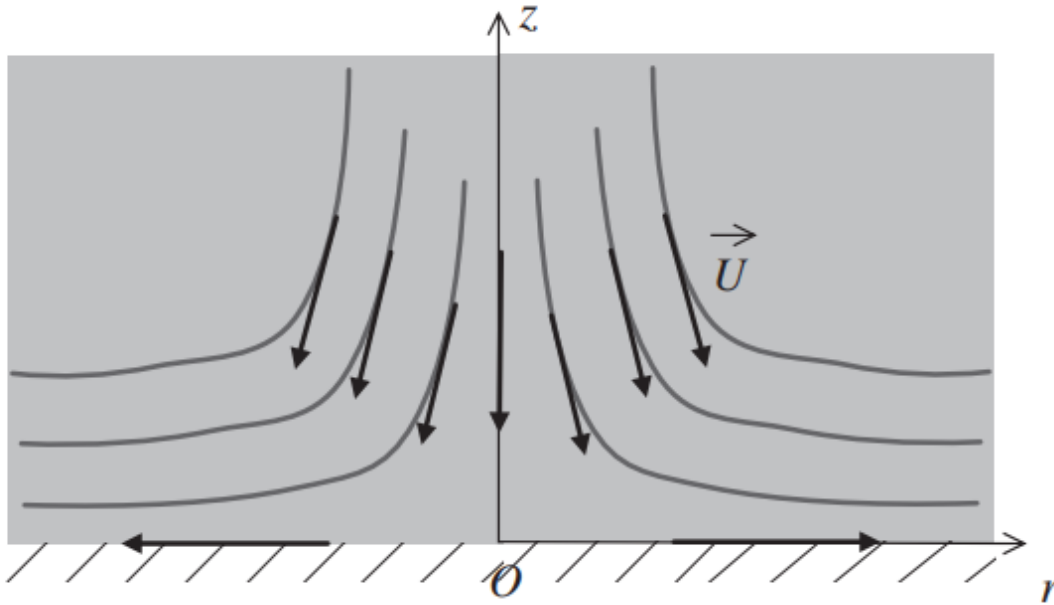
$$(1) \Rightarrow \phi = k r^2 + C_1(z). \text{ Et donc } \frac{\partial \phi}{\partial z} = C_1'(z) = -4kz \Rightarrow C_1(z) = -2kz^2 + C_2$$

Où C_2 est une constante. D'où finalement : $\phi = k r^2 - 2kz^2 + C_2$

5. Équation des lignes de courant :

$$\frac{dr}{U_r} = \frac{dz}{U_z} \Rightarrow \frac{dr}{2kr} = \frac{dz}{-4kz}$$

Soit en intégrant, on obtient l'équation des lignes de courant suivante : $r^2 z = cste$. On trace alors ces lignes de courant :



Cet écoulement correspond à l'écoulement d'un jet sur une plaque. L'axe (Oz) est une ligne de courant.

6. Comme l'écoulement est incompressible alors on peut écrire que :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(rU_r)}{\partial r} = -\frac{\partial U_z}{\partial z} \text{ et donc } \frac{\partial(rU_r)}{\partial r} = -\frac{\partial(rU_z)}{\partial z}$$

$d\psi$ étant une différentielle totale exacte, on peut écrire :

$$d\psi(r, z) = \frac{\partial\psi}{\partial r} dr + \frac{\partial\psi}{\partial z} dz = -rU_z dr + rU_r dz = F_1 dr + F_2 dz$$

Car d'après le théorème de *Schwartz*, on a bien $\partial F_1 / \partial z = \partial F_2 / \partial r$ et on vérifie bien que $\bar{\nabla}\phi$ est perpendiculaire à $\bar{\nabla}\psi$:

$$\bar{\nabla}\phi \cdot \bar{\nabla}\psi = \frac{\partial\phi}{\partial r} \frac{\partial\psi}{\partial r} + \frac{\partial\phi}{\partial z} \frac{\partial\psi}{\partial z} = U_r (-rU_z) + U_z (rU_r) = 0$$

La fonction de courant peut être déterminée par :

$$\begin{cases} \frac{\partial \psi}{\partial r} = -r U_z = 4 k z r \\ \frac{\partial \psi}{\partial z} = r U_r = 2 k r^2 \end{cases}$$

En intégrant on obtient : $\psi = 2kzr^2 + C$

7. Lorsque $\psi = cste$ alors $zr^2 = cste$ et on retrouve bien le résultat du 5). On sait que $\vec{\nabla} \phi \perp \vec{\nabla} \psi$ donc $\vec{U} \perp \vec{\nabla} \psi$. Or $\vec{\nabla} \psi$ est normal à $\psi = cste$, donc \vec{U} est tangente en chaque point de la courbe $\psi = cste$.

Chapitre 4 : Dynamique des fluides incompressibles parfaits

4-1- Introduction

Lorsque le fluide est en mouvement, la pression en tout point du fluide est dépendante de l'altitude et de la masse volumique du fluide (on retrouve ici la relation de l'hydrostatique décrite au chapitre 2) mais aussi de la vitesse du fluide. La pression est donc la somme d'une pression motrice et d'une pression dynamique. La pression et la vitesse dans un écoulement de fluide parfait sont liées par la relation de Bernoulli, relation qui est démontrée dans ce chapitre.

Afin de calculer les efforts exercés par le fluide en mouvement sur les objets solides avec lesquels il est en contact, nous allons utiliser les bilans de masse et de quantité de mouvement sur des volumes de contrôle englobant l'écoulement dans sa globalité ou en partie. Ceci fait l'objet de la deuxième partie de ce chapitre. Nous verrons que cette approche conduit à un outil de calcul simple et performant dans la configuration de l'écoulement globalement unidimensionnel en régime permanent. Dans ce chapitre nous supposons un écoulement incompressible et permanent de fluides parfaits. Nous verrons au chapitre 6 une généralisation de ces outils au cas des fluides visqueux [6].

4-2- Equations générales de la dynamique des fluides parfaits

Soit un cylindre élémentaire de fluide parfait qui se déplace. La démonstration se fait dans la direction des z ; pour les autres directions x et y elle se fait de façon analogue.

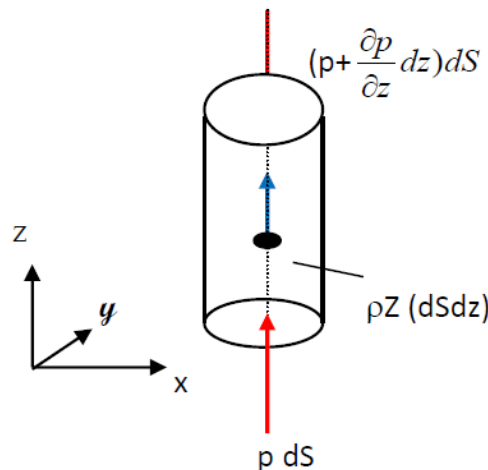


Figure 4-1 Forces agissant sur un élément de volume ($dSdz$) dans la direction z

Les forces qui agissent sur cet élément de volume ($dSdz$) sont :

1. La force de volume : $\rho Z (dSdz)$
2. Les forces de pression : $p dS$ et $(p + \frac{\partial p}{\partial z} dz) dS$

3. La force d'inertie (accélération) : $\rho \frac{dw}{dt} dSdz$

Où w est la composante de la vitesse \vec{V} (u, v, w) selon la direction z

Etant donné que la masse volumique reste constante, l'ensemble des forces satisfait à

l'équation de Newton : $\Sigma \vec{F}_{ext} = \text{masse} \times \text{accélération}$

La condition d'équilibre des forces selon la direction des z s'écrit (par unité de volume) :

$$-\frac{\partial p}{\partial z} + \rho Z = \rho \frac{dw}{dt} \quad (4.1)$$

On peut écrire de manière identique la condition d'équilibre des forces dans les autres directions, puis sous sa forme vectorielle.

$$\overrightarrow{\rho F} - \overrightarrow{\text{grad } p} = \rho \frac{d\vec{v}}{dt} \quad (4.2)$$

$\overrightarrow{\rho F}$: Force de volume par volume unitaire

$\overrightarrow{\text{grad } p}$: Force de pression par volume unitaire

$\rho \frac{d\vec{v}}{dt}$: Force d'inertie par volume unitaire

\vec{F} est le vecteur de force de volume par unité de masse dont les trois composantes sont (X, Y, Z).

Les équations (4.2) sont appelées équations générales de la dynamique des fluides parfaits ou **équations d'Euler**

Écoulement permanent

L'écoulement d'un fluide est dit permanent si le champ des vecteurs vitesse des particules fluides est constant dans le temps. Notons cependant que cela ne veut pas dire que le champ des vecteurs vitesse est uniforme dans l'espace. L'écoulement permanent d'un fluide parfait incompressible est le seul que nous aurons à considérer dans ce cours. Un écoulement non permanent conduirait à considérer les effets d'inertie des masses fluides.

Equation de continuité

Considérons une veine d'un fluide incompressible de masse volumique ρ animée d'un écoulement permanent.

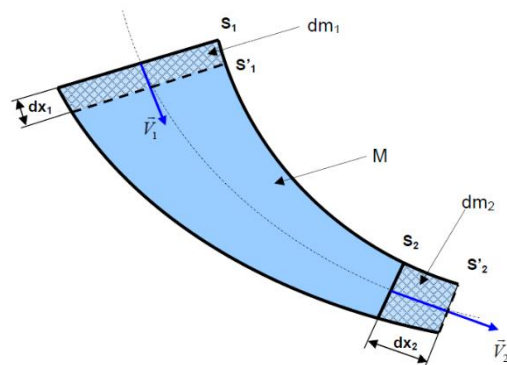


Figure 4-1 Veine de fluide incompressible

On désigne par :

- S1 et S2 respectivement la section d'entrée et la section de sortie du fluide à l'instant t,
 - S'1 et S'2 respectivement les sections d'entrée et de sortie du fluide à l'instant t'=(t+dt),
 - V_1 et V_2 les vecteurs vitesse d'écoulement respectivement à travers les sections S1 et S2 de la veine.
 - dx_1 et dx_2 respectivement les déplacements des sections S1 et S2 pendant l'intervalle de temps dt,
 - dm_1 : masse élémentaire entrante comprise entre les sections S1 et S'1,
 - dm_2 : masse élémentaire sortante comprise entre les sections S2 et S'2,
 - M : masse comprise entre S1 et S2,
 - dV_1 : volume élémentaire entrant compris entre les sections S1 et S'1,
 - dV_2 : volume élémentaire sortant compris entre les sections S2 et S'2,
- A l'instant t : le fluide compris entre S1 et S2 a une masse égale à ($dm_1 + M$)
A l'instant t+dt : le fluide compris entre S'1 et S'2 a une masse égale à ($M + dm_2$).

Par conservation de la masse: $dm_1 + M = M + dm_2$ en simplifiant par M on aura $dm_1 = dm_2$
Donc $\rho_1 dV_1 = \rho_2 dV_2$ ou encore $\rho_1 \cdot S_1 \cdot dx_1 = \rho_2 \cdot S_2 \cdot dx_2$,

En divisant par dt on aboutit à :

$$\rho_1 S_1 \frac{dx_1}{dt} = \rho_2 S_2 \frac{dx_2}{dt} \rightarrow \rho_1 \cdot S_1 \cdot V_1 = \rho_2 \cdot S_2 \cdot V_2$$

Puisque le fluide est incompressible : $\rho_1 = \rho_2 = \rho$ On peut simplifier et aboutir à l'équation de continuité suivante :

$$S_1 \cdot V_1 = S_2 \cdot V_2 \quad (1)$$

4-3- Notion de débit

4-3-1- Débit massique

Le débit massique d'une veine fluide est la limite du rapport $\frac{dm}{dt}$ quand dt tend vers 0.

$$q_m = \frac{dm}{dt} \quad (4.3)$$

où :

- q_m est la masse de fluide par unité de temps qui traverse une section droite quelconque de la conduite.
- dm : masse élémentaire en (kg) qui traverse la section pendant un intervalle de temps dt .
- dt : intervalle de temps en (s) en tenant compte des équations précédentes on obtient :

$$q_m = \frac{dm}{dt} = \rho \cdot S_1 \cdot \frac{dx_1}{dt} = \rho \cdot S_2 \cdot \frac{dx_2}{dt} \quad (4.4)$$

avec :

$\frac{dx_1}{dt} = V_1 = \|\vec{V}_1\|$: Vitesse moyenne d'écoulement de la veine fluide à travers S1,

$\frac{dx_2}{dt} = V_2 = \|\vec{V}_2\|$: Vitesse moyenne d'écoulement de la veine fluide à travers S2

D'après (4.4) :

$$q_m = \rho_1 S_1 \cdot V_1 = \rho_2 \cdot S_2 \cdot V_2 \quad (4.5)$$

Soit dans une section droite quelconque S de la veine fluide à travers laquelle le fluide s'écoule à la vitesse moyenne v :

$$q_m = \rho \cdot S \cdot V \quad (4.6)$$

où :

q_m : Débit massique en (kg/s)

ρ : Masse volumique en (kg/m³)

S : Section de la veine fluide en (m²)

V : Vitesse moyenne du fluide à travers (S) en (m/s)

4-3-2- Débit volumique

Le débit volumique d'une veine fluide est la limite du rapport $\frac{dV}{dt}$ quand dt tend vers 0.

$$q_V = \frac{dV}{dt} \quad (4.7)$$

Où :

- q_V : Volume de fluide par unité de temps qui traverse une section droite quelconque de la conduite.

- dV : Volume élémentaire, en (m³), ayant traversé une surface S pendant un intervalle de temps dt ,

- dt : Intervalle de temps en secondes (s),

D'après la relation (4.7) et en notant que $dV = \frac{dm}{\rho}$ on peut écrire également que

$q_V = \frac{q_m}{\rho}$ soit:

$$q_V = S.V \quad (4.8)$$

4-4- Théorème de BERNOULLI : Cas d'un écoulement sans échange de travail

Un fluide parfait est un fluide dont l'écoulement se fait sans frottement. On considère un écoulement permanent isovolume d'un fluide parfait, entre les sections S_1 et S_2 , entre lesquelles il n'y a aucune machine hydraulique (pas de pompe, ni de turbine) [7].

On reprend le schéma de la veine fluide du paragraphe précédent avec les mêmes notations et les hypothèses suivantes :

- Le fluide est parfait et incompressible.
- L'écoulement est permanent.
- L'écoulement est dans une conduite parfaitement lisse.

On considère un axe \vec{Z} vertical dirigé vers le haut.

On note Z_1 , Z_2 et Z respectivement les altitudes des centres de gravité des masses dm_1 , dm_2 et M .

On désigne par F_1 et F_2 respectivement les normes des forces de pression du fluide agissant au niveau des sections S_1 et S_2 .

A l'instant t le fluide de masse ($dm_1 + M$) est compris entre S_1 et S_2 . Son énergie mécanique est :

$$E_{mec} = E_{pot} + E_{cin} = (dm_1.g.Z_1) + (M.g.Z) + \frac{1}{2} dm_1.V_1^2 + \int_{S_1}^{S_2} \frac{dm.V^2}{2} \quad (4.9)$$

A l'instant $t'=(t+dt)$ le fluide de masse ($M+dm_2$) est compris entre S'_1 et S'_2 . Son énergie mécanique est :

$$E'_{mec} = E'_{pot} + E'_{cin} = (dm_2.g.Z_2) + (M.g.Z) + \frac{1}{2} dm_2.V_2^2 + \int_{S'_1}^{S'_2} \frac{dm.V^2}{2} \quad (4.10)$$

On applique le théorème de l'énergie mécanique au fluide entre t et t' : « La variation de l'énergie mécanique est égale à la somme des travaux des forces extérieures. »

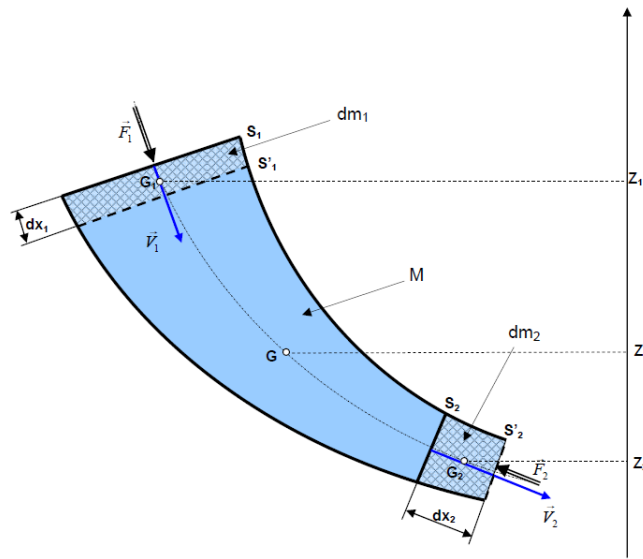


Figure 4-2 veine de fluide incompressible

$$E'_{mec} - E_{mec} = W_{Force\ de\ pression} = F_1 dx_1 - F_2 dx_2 = P_1 S_1 dx_1 - P_2 S_2 dx_2 = P_1 dV_1 - P_2 dV_2 \quad (4.11)$$

En simplifiant on obtient :

$$dm_2 g Z_2 + \frac{1}{2} dm_2 V_2^2 - dm_1 g Z_1 - \frac{1}{2} dm_1 V_1^2 = \frac{P_1}{\rho_1} dm_1 - \frac{P_2}{\rho_2} dm_2 \quad (4.12)$$

Par conservation de la masse : $dm_1 = dm_2 = dm$ et puisque le fluide est incompressible $\rho_1 = \rho_2 = \rho$, On aboutie à l'équation de Bernoulli :

$$\frac{V_2^2 - V_1^2}{2} + \frac{P_2 - P_1}{\rho} g(Z_2 - Z_1) = 0 \quad (4.13)$$

L'unité de chaque terme de la relation (4.13) est le joule par kilogramme (J/kg)

4-5- Théorème de BERNOULLI : Cas d'un écoulement avec échange de travail

Reprenons le schéma de la veine fluide précédent avec les mêmes notations et les mêmes hypothèses. On suppose en plus qu'une machine hydraulique est placée entre les sections S_1 et S_2 . Cette machine est caractérisée par une puissance nette P_{net} échangée avec le fluide, une puissance sur l'arbre P_a et un certain rendement η . Cette machine peut être soit une turbine soit une pompe [8].

Dans le cas d'une pompe : le rendement est donné par l'expression suivante :

$$\eta = \frac{P_{net}}{P_a} \quad (4.14)$$

Dans le cas d'une turbine : le rendement est donné par l'expression suivante :

$$\eta = \frac{P_a}{P_{net}} \quad (4.15)$$

Entre les instant t et $t' = (t + dt)$, le fluide a échangé un travail net $W_{net} = P_{net} dt$ avec la machine hydraulique. W_{net} est supposé positif s'il s'agit d'une pompe et négatif s'il s'agit

d'une turbine. On désigne par F_1 et F_2 respectivement les normes des forces de pression du fluide agissant au niveau des sections S_1 et S_2 .

A l'instant t le fluide de masse $(dm_1 + M)$ est compris entre S_1 et S_2 [9]. Son énergie mécanique est :

$$E_{mec} = E_{pot} + E_{cin} = (dm_1.g.Z_1) + (M.g.Z) + \frac{1}{2} dm_1.V_1^2 + \int_{S_1}^{S_2} \frac{dm.V^2}{2} \quad (4.17)$$

A l'instant $t'=(t+dt)$ le fluide de masse $(M+dm_2)$ est compris entre S'_1 et S'_2 . Son énergie mécanique est :

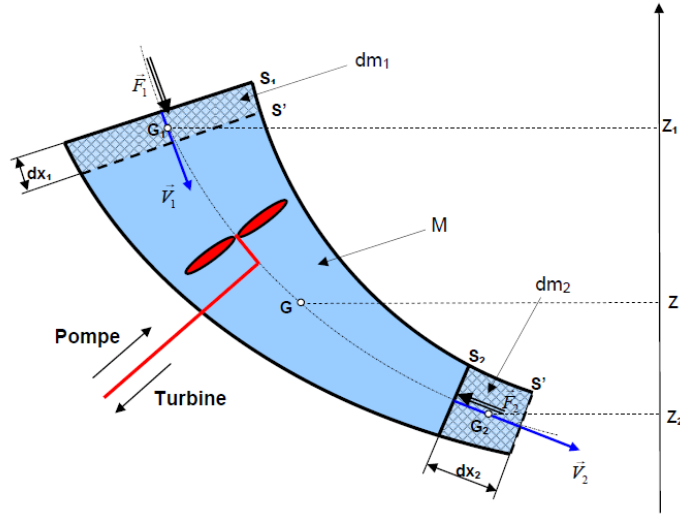


Figure 4-3 veine de fluide incompressible avec une machine hydraulique

$$E'_{mec} = E'_{pot} + E'_{cin} = (dm_2.g.Z_2) + (M.g.Z) + \frac{1}{2} dm_2.V_2^2 + \int_{S'_1}^{S'_2} \frac{dm.V^2}{2} \quad (4.18)$$

On applique le théorème de l'énergie mécanique au fluide entre t et t' : « La variation de l'énergie mécanique est égale à la somme des travaux des forces extérieures », en considérant cette fois ci le travail de la machine hydraulique [10].

$$\begin{aligned} E'_{mec} - E_{mec} &= F_1 dx_1 - F_2 dx_2 + P_{net}.dt \\ E'_{mec} - E_{mec} &= P_1 S_1 dx_1 - P_2 S_2 dx_2 + P_{net}.dt = P_1 dV_1 - P_2 dV_2 + P_{net}.dt \end{aligned} \quad (4.19)$$

En simplifiant on aura :

$$dm_2.g.Z_2 + \frac{1}{2} dm_2.V_2^2 - dm_1.g.Z_1 - \frac{1}{2} dm_1.V_1^2 = \frac{P_1}{\rho_1}.dm_1 - \frac{P_1}{\rho_1}.dm_1 + P_{net}.dt \quad (4.20)$$

Par conservation de la masse : $dm_1 = dm_2 = dm$ et puisque le fluide est incompressible : $\rho_1 = \rho_2 = \rho$, on aboutit à l'équation de Bernoulli :

$$\frac{V_2^2 - V_1^2}{2} + \frac{P_2 - P_1}{\rho} g(Z_2 - Z_1) = \frac{P_{net}}{q_m} \quad (4.21)$$

4-6- Application du Théorème de Bernoulli :

4-6-1- Tube de Pitot :

On considère un liquide en écoulement permanent dans une canalisation et deux tubes plongeant dans le liquide, l'un débouchant en A face au courant, et l'autre en B le long des lignes de courant, les deux extrémités étant à la même hauteur

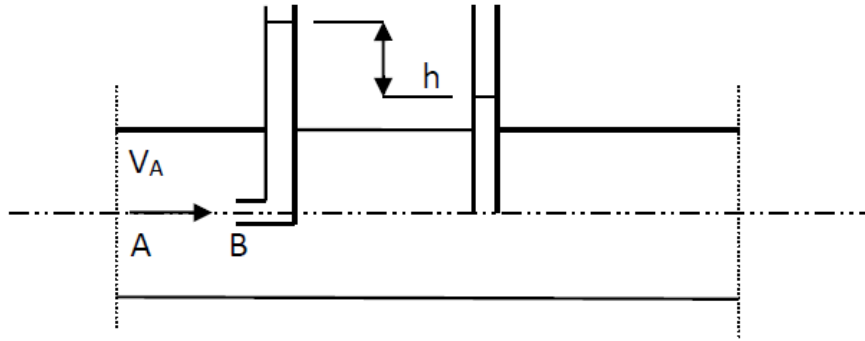


Figure 4-4 Tube de Pitot

Au point B , le liquide a la même vitesse v que dans la canalisation et la pression est la même que celle du liquide $p_B = p$.

En A , point d'arrêt, la vitesse est nulle et la pression est p_A . D'après le théorème de Bernoulli,

$$p_B + \frac{1}{2} \rho \cdot v^2 = p_A \quad \text{soit} \quad \frac{1}{2} \rho \cdot v^2 = \rho \cdot g \cdot h \quad (4.22)$$

En mesurant la dénivellation h du liquide dans les deux tubes, on peut en déduire la vitesse v d'écoulement du fluide [11].

4-6-2- Tube de Venturi :

Une conduite de section principale S subit un étranglement en B où sa section est S_B . La vitesse du fluide augmente dans l'étranglement, donc sa pression y diminue :

$$V_B > V_A \rightarrow p_B < p_A$$

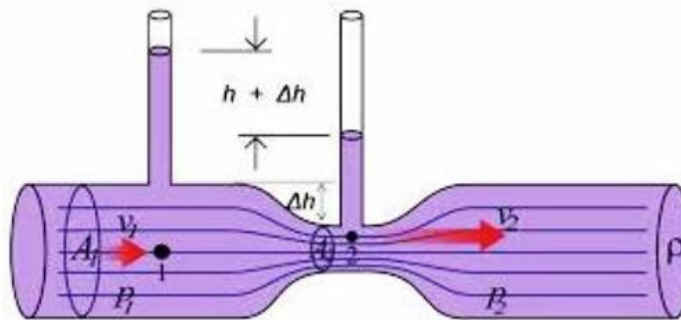


Figure 4-5 Tube de Venturi

Le théorème de Bernoulli s'écrit :

$$P_A + \frac{1}{2} \rho \cdot V_A^2 = P_B + \frac{1}{2} \rho \cdot V_B^2 = P_C + \frac{1}{2} \rho \cdot V_C^2 \quad (4.23)$$

D'après l'équation de continuité : $V_B \cdot S_B = V_A \cdot S_A = q_v$ et $V_B > V_A$ donc $P_A < P_B$

$$P_A - P_B = \frac{1}{2} \rho \cdot \left(\frac{1}{S_B^2} - \frac{1}{S_A^2} \right) \cdot q^2 = k \cdot q^2 \quad (4.24)$$

La différence de pression aux bornes des extrémités du tube de Venturi est proportionnelle au carré du débit.

4-6-3- Ecoulement d'un liquide contenu dans un réservoir - Théorème de Torricelli

Considérons un réservoir muni d'un petit orifice à sa base, de section S et une ligne de courant partant de la surface au point (1) et arrivant à l'orifice au point (2). En appliquant le théorème de Bernoulli entre les points (1) et (2)

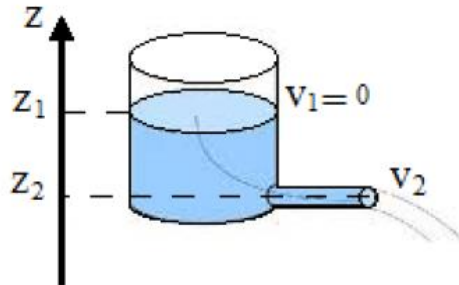


Figure 4-6 Théorème de Torricelli

$$P_1 + \frac{1}{2} \rho . V_1^2 + \rho . g . Z_1 = P_2 + \frac{1}{2} \rho . V_2^2 + \rho . g . Z_2 \quad (4.25)$$

Or $P_1 = P_2 =$ pression atmosphérique $Z_1 - Z_2 = h$ et $V_1 \ll V_2$

D'où la vitesse d'écoulement est la même que la vitesse de chute libre entre la surface libre et l'orifice, quelle que soit la masse volumique du liquide

$$V_2 = \sqrt{2 . g . h} \quad (4.26)$$

4-7- Théorème d'Euler:

Une application directe du théorème d'Euler est l'évaluation des forces exercées par les jets d'eau. Celles-ci sont exploitées dans divers domaines : production de l'énergie électrique à partir de l'énergie hydraulique grâce aux turbines, coupe des matériaux, etc. Le théorème d'Euler résulte de l'application du théorème de quantité de mouvement à l'écoulement d'un fluide :

$$\sum \overrightarrow{F_{ext}} = \frac{d\vec{P}}{dt} \quad \text{avec} \quad \vec{P} = m . \vec{V}_g : \text{quantité de mouvement.}$$

Ce théorème permet de déterminer les efforts exercés par le fluide en mouvement sur les objets qui les environnent.

Enoncé :

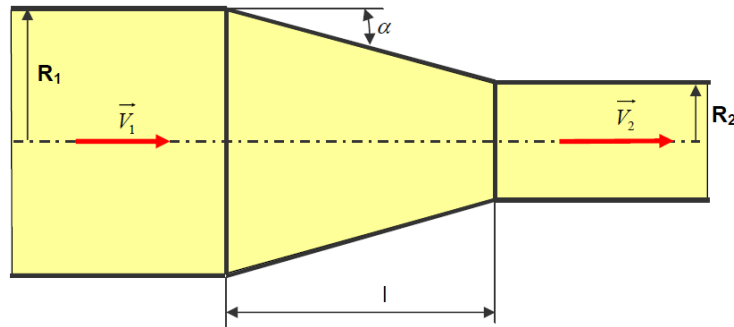
La résultante ($\sum \overrightarrow{F_{ext}}$) des actions mécaniques extérieures exercées sur un fluide isolé (fluide contenu dans l'enveloppe limitée par S_1 et S_2) est égale à la variation de la quantité de mouvement du fluide qui entre en S_1 à une vitesse V_1 et sort par S_2 à une vitesse V_2 .

$$\sum \overrightarrow{F_{ext}} = q_m (\vec{V}_2 - \vec{V}_1) \quad (4.27)$$

APPLICATIONS

Exercice N°1 :

On veut accélérer la circulation d'un fluide parfait dans une conduite de telle sorte que sa vitesse soit multipliée par 4. Pour cela, la conduite comporte un convergent caractérisé par l'angle α (schéma ci-dessus).



- 1) Calculer le rapport des rayons (R_1/R_2).
- 2) Calculer ($R_1 - R_2$) en fonction de L et α . En déduire la longueur L . ($R_1 = 50$ mm, $\alpha = 15^\circ$).

Réponse :

- 1) On applique l'équation de continuité :

$$V_1 \cdot S_1 = V_2 \cdot S_2 \quad \text{or} \quad S_1 = \pi \cdot R_1^2 \quad \text{et} \quad S_2 = \pi \cdot R_2^2 \quad \text{d'où} \quad \frac{R_1}{R_2} = \sqrt{\frac{V_2}{V_1}} = 2$$

$$2) \quad \tan \alpha = \frac{R_1 - R_2}{l} \quad \text{donc} \quad l = \frac{R_1 - R_2}{\tan \alpha} \quad \text{or} \quad R_2 = \frac{R_1}{2} \quad \text{donc} \quad l = \frac{R_1}{2 \cdot \tan \alpha}$$

$$L = 93,3 \text{ mm}$$

Exercice N°2 :

Un étage est alimenté en eau à l'aide d'une pompe entraînée par un moteur électrique. La pompe puise de l'eau d'un réservoir de grande dimension et ouvert à l'air libre et le refoule à l'air libre. Le débit assuré est 1 l/s . Le diamètre de la conduite d'aspiration est $d_a = 32$ mm et celui du refoulement est $d_r = 18$ mm. On donne en plus : $h_a = 5$, $h_r = 15$ m , le rendement de la pompe $\eta_p = 0.6$ et celui du moteur $\eta_m = 0.85$ Calculer :

- 1/ L'énergie par unité de volume fournie par la pompe à l'eau ;
- 2/ La puissance électrique consommée ;
- 3/ Les pressions absolues et effectives à l'entrée et à la sortie de la pompe.

Réponse :

On applique le théorème de Bernoulli à l'entrée et à la sortie de la pompe :

$$\frac{1}{2} \rho (v_s^2 - v_e^2) + \rho \cdot g (z_s - z_e) + (p_s - p_e) = \frac{P_{\text{Fluide}}}{q_v}$$

Calculons alors les vitesses à l'entrée et à la sortie :

$$\text{On a : } v = \frac{4 \cdot q_v}{\Pi \cdot d^2} ;$$

$$v_s = \frac{4 \cdot q_v}{\Pi \cdot d^2} = 3,93 \text{ m/s} ;$$

$$v_e = \frac{4 \cdot q_v}{\Pi \cdot d^2} = 1,24 \text{ m/s} ;$$

$$\frac{1}{2} 10^3 (3,93^2 - 1,24^2) + 10^3 \cdot 10 (15 - (-5)) + (p_{at} - p_{at}) = \frac{P_{\text{Fluide}}}{q_v} ;$$

L'énergie par unité de volume fournie par la pompe à l'eau est alors :

$$\frac{P_{\text{Fluide}}}{q_v} = E = 206953,4 \text{ Pa} \Leftrightarrow P_{\text{Fluide}} = 206953,4 * q_v$$

$$P_{\text{fluide}} = 206,9 \text{ KW}$$

2/- Le rendement sur la pompe est :

$$\eta_p = \frac{P_h}{P} \Leftrightarrow P = \frac{P_h}{\eta_p} = \frac{206,9}{0,6} = 344,85 \text{ w}$$

Le rendement sur l'arbre de transmission est : $\eta_m = \frac{P}{P_h}$

La puissance électrique consommée est alors :

$$P_h = \frac{P}{\eta_m} = \frac{344,85}{0,85} = 405,7 \text{ w}$$

3/- On applique le théorème de Bernoulli :

$$\frac{1}{2} \rho (v_4^2 - v_3^2) + \rho \cdot g (z_4 - z_3) + (p_4 - p_3) = 0$$

La vitesse v_4 étant juste à la sortie de la conduite donc $v_4 = v_3$ et $z_4 - z_3 = h_r$.

$$\text{D'où } p_3 = p_4 + \rho \cdot g \cdot h_r .$$

$$\text{Et } p_3 = p_{\text{abs}} = 10^5 + 10^4 * 15 = 2,5 \cdot 10^5 \text{ Pa} \quad p_{\text{seff}} = 1,5 \text{ bar}$$

$$p_{\text{abs}} = 2,5 \text{ bar}$$

On applique le théorème de Bernoulli

$$\frac{1}{2} \rho (v_2^2 - v_1^2) + \rho \cdot g (z_2 - z_1) + (p_2 - p_1) = 0$$

Or $v_1 = 0$ (vitesse nulle à la surface du liquide)

$$- \frac{1}{2} \rho (v_2^2 - v_1^2) + \rho \cdot g (z_2 - z_1) + (p_1) = p_2$$

et $p_2 = p_{\text{abs}}$

$$p_{\text{abs}} = 10^5 - 0,5 \cdot 10^3 \cdot 1 \cdot 24^2 + 10^4 \cdot (-5) = 0,49 \text{ bar}$$

$$p_{\text{effe}} = 0,49 - 1 = -0,51 \text{ bar}$$

Chapitre 5 : Dynamique des fluides incompressibles réels

5-1- Introduction :

Dans le chapitre précédent nous avons supposé que le fluide était parfait pour appliquer l'équation de conservation de l'énergie. L'écoulement d'un **fluide réel** est plus complexe que celui d'un fluide idéal. En effet, il existe des forces de frottement, dues à la viscosité du fluide, qui s'exercent entre les particules de fluide et les parois, ainsi qu'entre les particules elles-mêmes. Pour résoudre un problème d'écoulement d'un fluide réel, on fait appel à des résultats expérimentaux, en particulier ceux de l'ingénieur et physicien britannique *Osborne Reynolds*.

Une méthode simplifiée de calcul des pertes de charge basée sur ces résultats expérimentaux est proposée. Elle est indispensable pour le dimensionnement des diverses installations hydrauliques (de pompage, de turbines, de machines hydrauliques et thermiques dans lesquelles est véhiculé un fluide réel...etc.)

5-2- Fluide réel

Un fluide est dit réel si, pendant son mouvement, les forces de contact ne sont pas perpendiculaires aux éléments de surface sur lesquelles elles s'exercent (elles possèdent donc des composantes tangentielles qui s'opposent au glissement des couches fluides les unes sur les autres). Cette résistance est caractérisée par la viscosité.

5-3- Régimes d'écoulement

5-3-1- L'expérience de Reynolds

Les expériences réalisées par Reynolds (1883) lors de l'écoulement d'un liquide dans une conduite cylindrique rectiligne dans laquelle arrive également un filet de liquide coloré, ont montré l'existence de trois régimes d'écoulement : laminaire, transitoire et turbulent [12].

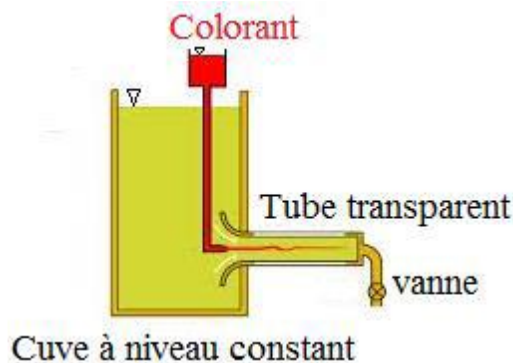


Figure 5-1 Expérience de Reynolds

En utilisant des divers fluides (viscosité différente), et en faisant varier le débit et le diamètre de la canalisation, Reynolds a montré que le paramètre qui permettait de déterminer si l'écoulement est laminaire ou turbulent est un nombre sans dimension appelé nombre de Reynolds [13]

5-3-2- Nombre de Reynolds

Le nombre de Reynolds est un nombre sans dimension utilisé en mécanique des fluides. Il a été mis en évidence en 1883 par Osborne Reynolds. Il caractérise un écoulement, en particulier la nature de son régime (laminaire, transitoire, turbulent).

Le nombre de Reynolds représente le rapport entre les forces d'inertie et les forces visqueuses. Ce nombre sans dimension apparaît naturellement en dimensionnant les équations de Navier-Stokes. On le définit de la manière suivante [14] :

$$Re = \frac{V.D.\rho}{\mu} = \frac{V.D}{\nu} \quad (5.1)$$

Avec :

D : Diamètre intérieur de la conduite en (m)

V : Vitesse moyenne d'écoulement en (m/s)

ρ : Masse volumique du fluide en (kg/m³)

μ : Viscosité dynamique en (Pa.s)

ν : Viscosité cinématique en (m²/s)

En fonction des nombres de Reynolds croissants, on distingue quatre régimes principaux : régime de Stokes, régime laminaire, régime transitoire, régime turbulent.

L'écoulement de Stokes correspond aux très faibles valeurs du Reynolds (inférieures à 1). Dans ce cas les forces d'inertie liées aux vitesses étant négligeables, les forces visqueuses et les forces de pression s'équilibrent. Cette notion correspond au domaine de la micro fluidique. Pour des valeurs plus élevées, les forces d'inertie entrent en jeu : c'est le domaine de la dynamique des fluides.

Régime laminaire : Les filets fluides sont des lignes régulières, sensiblement parallèles entre elles.

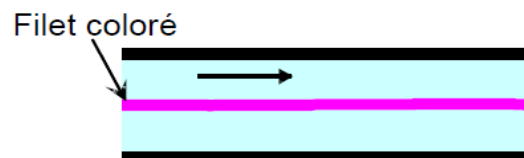


Figure 5-2 Régime laminaire

Régime turbulent : Les filets fluides s'enchevêtrent, s'enroulent sur eux-mêmes.



Figure 5-3 Régime turbulent

Régime transitoire : c'est une transition entre le régime laminaire et le régime turbulent

- Si $Re < 2000$, le régime est Laminaire.
- Si $Re > 3000$, le régime est turbulent.

- Si $2000 < Re < 3000$, le régime est transitoire.

5-4-Analyse Dimensionnelle

5-4-1-Introduction

Jusqu'à maintenant nous avons traité les méthodes analytiques pour solutionner les problèmes de mécanique de fluide. Pourtant dans la pratique, ces méthodes ne sont pas toujours satisfaisantes pour les raisons suivantes:

- 1- souvent des simplifications sont nécessaires pour résoudre les problèmes ;
- 2- une analyse détaillée peut être chère.

La méthode alternative est d'utiliser la méthode expérimentale et de dériver des corrélations applicables aux tous les cas rencontrés du même type de problème. Pour mener à bien une telle étude et analyse, il faut planifier et organiser bien les procédures expérimentales ; si non, on aura:

- b- Des difficultés techniques,
- c- De perte de temps,
- d- Un coût élevé.

Ceci sera surtout le cas puisqu'on utilise souvent des modèles dans les conditions expérimentales et certaine fois des fluides différents. L'analyse dimensionnelle nous offre une procédure pour éviter les problèmes éventuels et assurer d'obtenir des corrélations sans dimension qu'on peut utiliser dans les conditions pratiques et d'une façon quasi universelle, i.e. dans les conditions dynamiques similaires incluant avec d'autre fluide qu'on a obtenu ces corrélations. La procédure principale de l'analyse dimensionnelle peut être résumée comme suit :

- 1- Compiler une liste de variables pertinentes soit dépendante ou indépendante pour le problème considéré,
- 2- En utilisant une technique appropriée, identifier le nombre et la forme des paramètres adimensionnels.

Une de ces techniques utilisées est du théorème Π de Buckingham, que nous allons étudier la suite.

5-4-2- Théorème Π de Buckingham

Nous allons faire les définitions suivantes:

n : le nombre de paramètres indépendants du problème ;

j' : le nombre de dimensions de base trouvées dans les n paramètres ;

j : le nombre de dimensions de base nécessaires à considérer simultanément ;

k : le nombre de termes Π indépendants qui peut être identifié pour décrire le problème,

$$k = n - j$$

Les étapes à suivre pour l'analyse dimensionnelle sont :

1. Lister les n paramètres du problème

2. Exprimer les dimensions de chaque paramètre en utilisant les dimensions de base, (M, L, t, θ). Compter le nombre des dimensions de base utilisé, j' , dans l'ensemble des paramètres considérés
3. Trouver le nombre j en supposant initialement $j = j'$ et chercher les paramètres répétés qui ne forment pas un produit Π . Si ce n'est pas possible, réduire j par un et répéter la procédure
4. Choisir j paramètres répétés qui ne forment pas le produit Π
5. En choisissant les paramètres non répétés, un par un, et mettant ensemble avec les paramètres répétés, former les Π ; trouver algébriquement les puissances de chaque paramètre répété pour faire les Π sans dimension
6. Écrire la combinaison de Π ainsi trouvé dans une forme de fonction :

$$\Pi_k = f(\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_i) \quad (5.2)$$

Exemple 1

Nous considérons le problème de l'écoulement visqueux dans un conduit rond. Nous cherchons à trouver la chute de pression sans dimension en fonction des autres paramètres sans dimension. Les paramètres de ce problème sont :

ΔP : chute de pression,

V : vitesse moyenne,

D : diamètre, L : longueur,

ρ : densité, μ : viscosité,

ε : rugosité.

Donc, nous avons ΔP : paramètre dépendant et $(V, D, L, \rho, \mu, \varepsilon)$: paramètres indépendants.

Suivant la procédure discutée ci haut, nous aurons :

Solution :

1. Le nombre de paramètres indépendants : $n = 7$

2. La liste des paramètres et leurs dimension en utilisant (M, L, t, θ) :

Paramètres	ΔP	V	D	L	ρ	μ	ε
Dimension	$ML^{-1}t^{-2}$	Lt^{-1}	L	L	ML^{-3}	$ML^{-1}t^{-1}$	L

Nous avons le nombre de dimensions de base (M, L, t) , i.e. $j' = 3$.

3. Choisir $j = j' = 3$ et les paramètres répétés comme V, D, ρ . Ces paramètres ne peuvent pas former un produit Π sans dimension. En effet, aucune combinaison de ces trois paramètres peut éliminer la masse M de la densité et le temps t de la vitesse.
4. Cette étape est la même que l'étape 3 ; les paramètres répétés sont V, D, ρ et $j = 3$. Donc, $k = n - j = 7 - 3 = 4$. Nous allons trouver 4 Π indépendants.
5. Obtenir les Π

$$\Pi_1 = V^a D^b \rho^c \mu^1 = (Lt^{-1})^a L^b (ML^{-3})^c (ML^{-1}t^{-1})^1$$

Pour que la dimension de Π_1 soit sans dimension il faut que la puissance de chaque dimension de base soit zéro. Donc, en prenant la somme des puissances de chaque dimension de base, nous pouvons écrire :

$$M : c + 1 = 0, c = -1$$

$$t : -a - 1 = 0, a = -1$$

$$L : a + b - 3c - 1 = 0, b = -1$$

Nous avons donc,

$$\Pi_1 = \frac{\mu}{\rho V D} \quad (5.3)$$

Nous pouvons l'écrire sans perdre la généralité comme :

$$\Pi_1 = \frac{\rho V D}{\mu} \quad (\text{le nombre de Reynolds})$$

Nous pouvons répéter la même opération pour le paramètre L :

$$\Pi_2 = V^a D^b \rho^c L^1 = (Lt^{-1})^a L^b (ML^{-3})^c L^1$$

Nous aurons :

$$M : c = 0$$

$$t : -a = 0$$

$$L : a + b - 3c + 1 = 0, b = -1$$

Donc :

$$\Pi_2 = L/D \quad (\text{le rapport de longueur à diamètre})$$

Maintenant, nous allons le faire pour ε :

$$\Pi_2 = V^a D^b \rho^c \varepsilon^1 = (Lt^{-1})^a L^b (ML^{-3})^c L^1$$

Nous aurons :

$$M : c = 0$$

$$t : -2a = 0, a = 0$$

$$L : a + b - 3c + 1 = 0, b = -1$$

$$\Pi_3 = \varepsilon/D \quad (\text{la rugosité relative})$$

Finalement, pour le paramètre principal, ΔP :

$$\Pi_2 = V^a D^b \rho^c \Delta P^1 = (Lt^{-1})^a L^b (ML^{-3})^c (ML^{-1}t^{-2})^1$$

$$M : c = 0$$

$$t : -a - 2 = 0, a = -2$$

$$L : a + b - 3c - 1 = 0, b = -1$$

$$\Pi_4 = \Delta P / \rho V^2 \quad (\text{le coefficient de pression})$$

6. On obtient pour la combinaison de ces paramètres :

$$\frac{\Delta P}{\rho V^2} = f \left\{ \frac{\rho V D}{\mu}, \frac{L}{D}, \frac{\varepsilon}{D} \right\}$$

Ou

$$C_p = \{Re, \bar{L}, \bar{\varepsilon}\}$$

Nous voyons que le coefficient de chute de pression dans un écoulement visqueux dans un conduit avec rugosité est une fonction de (1) nombre de Reynolds, (2) la longueur sans dimension du conduit, (3) la rugosité sans dimension du conduit [15].

Problème 1 :

Un fluide s'écoule dans un conduit rond horizontal avec une vitesse moyenne V . Une plaque avec orifice de diamètre de d est placée dans le conduit. On désire étudier la chute de pression à travers de l'orifice, ΔP . En supposant $\Delta P = f(D, d, \rho, V)$, déterminez la chute de pression sans dimension en fonction des autres Π .

Rép. : $\Delta P / \rho V^2 = f(d/D)$

Problème 2 : Soit donnée une hélice de diamètre D en rotation avec une vitesse angulaire, ω dans un fluide (avec ρ, μ) qui est en mouvement avec une vitesse V . Développez une expression sans dimension pour la poussée développée par cette hélice.

Rép. : $\tau / \rho V^2 D^2 = f(\rho V D / \mu, \omega D / V)$

Problème 3 : Un conduit horizontal avec diamètre D a une contraction brusque à un diamètre d . Le fluide avec (ρ, μ) est en mouvement avec une vitesse V dans le conduit. On désire établir la chute de pression sans dimension en fonction des autres paramètres du problème. En supposant $\Delta P = f(D, d, \rho, \mu, V)$, déterminez la chute de pression sans dimension.

Rép. : $\Delta P / \rho V^2 = f(\rho V D / \mu, d/D)$

Problème 4 : On a un tube capillaire ayant un diamètre D . Le fluide monte à une hauteur h . En supposant $h = f(D, \gamma, Y)$ et en prenant les paramètres répétés comme D, γ trouvez une expression sans dimension pour h .

Rép. : $h/D = f(Y/D^2 \gamma)$

Problème 5 : Une plaque plane de dimension w (longueur) et h (largeur) est en mouvement linéaire dans un fluide avec une vitesse V dans sa direction de sa longueur. En supposant le frottement $F = f(w, h, \rho, \mu, V)$, déterminez un Π convenable pour étudier ce problème expérimentalement.

Rép. : $F / w^2 V^2 \rho = f(w/h, \rho V w / \mu)$

5-5- Pertes de charges

5-5-1-Introduction :

Un fluide réel, en mouvement, subit des pertes d'énergie dues aux frottements sur les parois de la canalisation (pertes de charges systématiques) ou sur les "accidents" de parcours (pertes de charge singulières). Ces pertes dépendent de la forme, des dimensions et de la rugosité de la canalisation, de la vitesse d'écoulement et de la viscosité du liquide mais non pas de la valeur absolue de la pression qui règne dans le liquide.

5-5-2- Pertes de charge systématiques (linéaires ou régulières) :

Les pertes de charge régulières (chute de pression $\Delta p = p_1 - p_2$) résultent du frottement exercé entre le fluide et la surface intérieure de la canalisation. Elles sont proportionnelles à la

longueur L de la conduite et au carré de la vitesse moyenne V du fluide, inversement proportionnelle au diamètre d et fonction de la rugosité moyenne R de la canalisation. Entre deux points séparés par une longueur L , dans un tuyau de diamètre D apparaît une perte de pression Δp . Exprimée sous les deux formes suivantes :

$$\Delta p = \lambda \frac{\rho V^2 L}{2 D} \quad \text{ou} \quad \Delta h = \lambda \frac{V^2 L}{2g D} \quad (5.4)$$

Différence de pression (Pa) Perte de charge exprimée en mètre de colonne de fluide (mCF)

λ est un coefficient sans dimension appelé coefficient de perte de charge linéaire. Le calcul des pertes de charge linéaires repose entièrement sur la détermination de ce coefficient. La valeur de λ dépend du régime d'écoulement.

a/ Cas de l'écoulement laminaire : $Re < 2000$

Dans ce cas on peut montrer que le coefficient λ est uniquement fonction du nombre de Reynolds Re ; l'état de la surface n'intervient pas et donc λ ne dépend pas de la rugosité R (noté aussi k), ni de la nature de la tuyauterie.

$$\lambda = \frac{64}{Re} \quad \text{avec} \quad Re = \frac{V \cdot D}{\nu} \quad (5.5)$$

Il est alors immédiat de voir que λ est proportionnel à la vitesse v et donc au débit q , ainsi qu'à la viscosité cinématique ν

b/ Cas de l'écoulement turbulent : $Re > 3000$

Les phénomènes d'écoulement sont beaucoup plus complexes et la détermination du coefficient de perte de charge résulte de mesures expérimentales. C'est ce qui explique la diversité des formules anciennes qui ont été proposées pour sa détermination.

En régime turbulent l'état de la surface devient sensible et son influence est d'autant plus grande que le nombre de Reynolds Re est grand. Tous les travaux ont montré l'influence de la rugosité et on s'est attaché par la suite à chercher la variation du coefficient λ en fonction du nombre de Reynolds Re et de la rugosité ε du tuyau.

La formule de Colebrook est actuellement considérée comme celle qui traduit le mieux les phénomènes d'écoulement en régime turbulent. Elle est présentée sous la forme suivante :

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log \left(\frac{\varepsilon/D}{3,7} + \frac{2,51}{Re \sqrt{\lambda}} \right) \quad (5.6)$$

L'utilisation directe de cette formule demanderait, du fait de sa forme implicite, un calcul par approximations successives ; on emploie aussi en pratique des représentations graphiques (abaques-diagramme de Moody) (Voir Annexe 1)

Pour simplifier la relation précédente, on peut chercher à savoir si l'écoulement est hydrauliquement lisse ou rugueux pour évaluer la prédominance des deux termes entre parenthèses dans la relation de Colebrook.

*** Remarque :**

On fait souvent appel à des formules empiriques plus simples valables pour des cas particuliers et dans un certain domaine du nombre de Reynolds, par exemple :

- **Formule de Blasius : (pour des tuyaux lisses et $Re < 10^5$)**

$$\lambda = (100.Re)^{-0,25} = 0,316.Re^{-0,25} \quad (5.7)$$

5-5-3- Pertes de charge singulières :

Les pertes de charges singulières résultent de la présence de coudes, raccords, branchements, robinets, etc. Tous ces éléments (singularités), installés le long des canalisations, constituent des obstacles qui freinent le passage du fluide et amènent des pertes de charge.

Les pertes de charge singulières sont proportionnelles au carré de la vitesse, elles sont exprimées sous les deux formes suivantes :

$$\Delta P = K \frac{\rho V^2}{2}$$

Différence de Pression (Pa)

$$\Delta h = K \frac{V^2}{2g}$$

Perte de charge exprimée (mCF)

(5.7)

Où K est appelé coefficient de perte de charge singulière (sans dimension).

Le coefficient k est déterminé empiriquement à partir des abaques ou des tableaux.

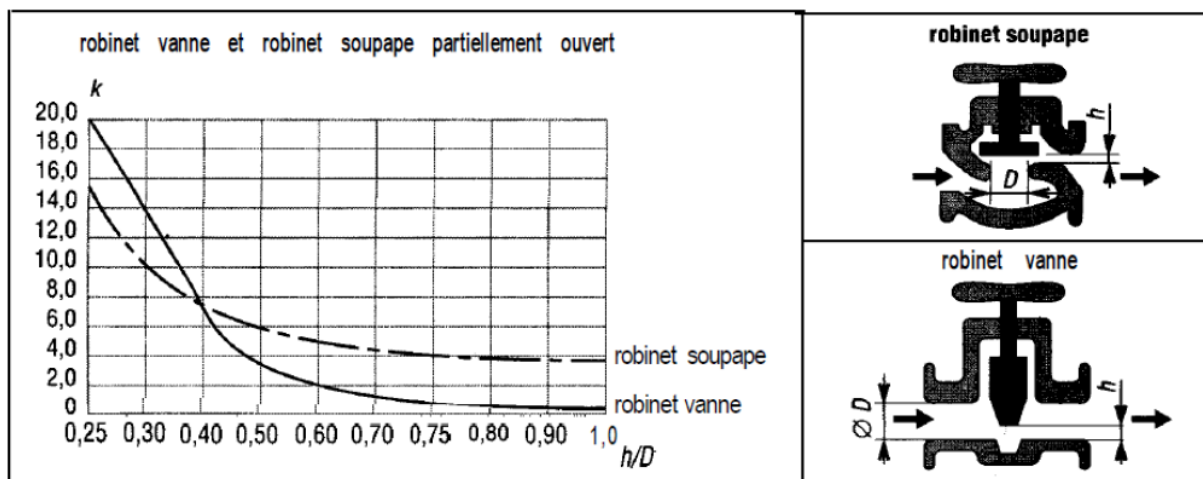


Figure 5-4 Modèle d'abaque pour la détermination de k

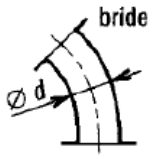
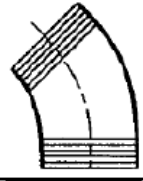
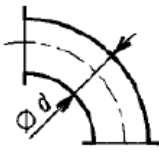
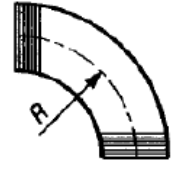


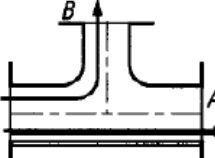
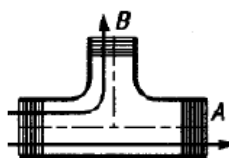
Éléments	d mm	avec brides					fileté				
		25	50	100	200	500	12	25	50	100	
coudes à 45° 	k	0,21	0,20	0,19	0,16	0,14	0,39	0,32	0,30	0,29	 fileté
coudes à 90° 	k	0,50	0,40	0,30	0,25	0,20	2,0	1,5	0,95	0,65	
	k (R grand)	0,40	0,30	0,20	0,15	0,10	1,0	0,70	0,40	0,24	
coudes à 180° 	k	0,41	0,35	0,30	0,25	0,20	2	1,5	0,95	0,65	
	k (R grand)	0,40	0,30	0,20	0,15	0,10					
tés 	k cas A	1,24	0,19	0,14	0,10	0,07	0,90	0,90	0,90	0,90	
	k cas B	1,0	0,80	0,64	0,58	0,41	2,4	1,8	1,4	1,1	

Figure 5-5 Modèle de tableau pour la détermination de k

5-5-4- Pertes de charge totales :

Lors d'un écoulement dans une conduite hydraulique, les pertes de charge totales sont l'addition de deux types de pertes de charge (régulières et singulières)

$$\Delta P_T = \Delta P_r + \Delta P_s \quad (5.8)$$

$\Delta P_r = K_r \cdot (\frac{1}{2} \cdot \rho \cdot V^2)$: pertes de charge par frottement avec ($K_r = \frac{\lambda \cdot l}{D}$)

$\Delta P_s = K_s \cdot (\frac{1}{2} \cdot \rho \cdot V^2)$: pertes de charge singulières ;

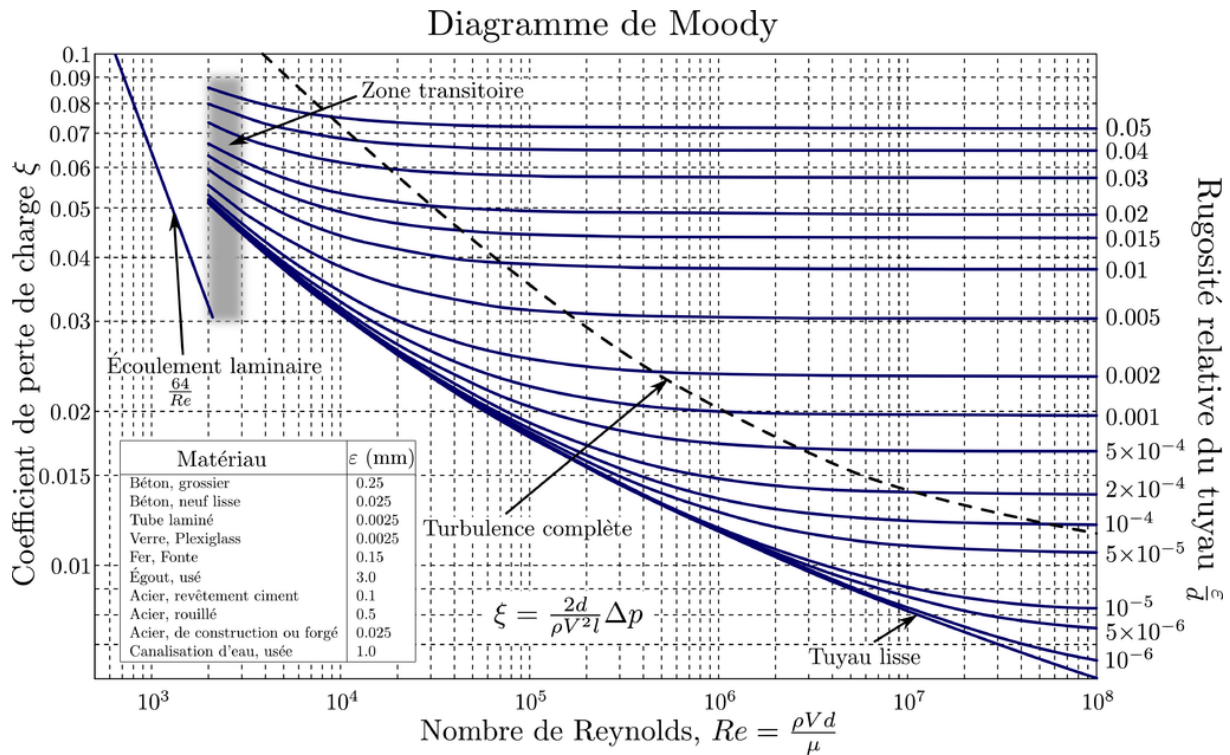


Figure 5-6 Diagramme de Moody

Le diagramme de Moody est un graphique sous forme non dimensionnelle qui relie le facteur de friction de Darcy, le nombre de Reynolds et la rugosité relative pour un écoulement pleinement développé dans un tuyau circulaire.

5-6- Théorème de Bernoulli généralisé :

Lors d'un écoulement d'un fluide réel entre deux points (1) et (2) il peut y avoir des échanges d'énergie entre ce fluide et le milieu extérieur :

- Par travail à travers une machine, pompe ou turbine ; la puissance échangée étant P (voir Théorème de Bernoulli)
- Par pertes de charge dues aux frottements du fluide sur les parois ou les accidents de parcours ; la différence de pression étant Δp [16].

$$\frac{1}{2} \rho (v_2^2 - v_1^2) + \rho g (z_2 - z_1) + (p_2 - p_1) = \frac{\sqrt{P}}{q_v} + \Delta p_{T12} \quad (5.9)$$

Avec :

- ΣP : somme des puissances échangées entre le fluide et le milieu extérieur, à travers une machine, entre (1) et (2) :
- $P > 0$: si le fluide reçoit de l'énergie de la machine (pompe).
- $P < 0$: si le fluide fournit de l'énergie à la machine (turbine).
- $P = 0$: s'il n'y a pas de machine entre (1) et (2).

Δp_{T12} : somme des pertes de charge entre (1) et (2).

APPLICATION

Exercice N°1 :

Déterminer le régime d'écoulement dans une conduite de 3 cm de diamètre pour:

- 1) De l'eau circulant à la vitesse $v=10,5$ m/s et de viscosité cinématique 1.10^{-6} m²/s
- 2) Du fuel lourd à 50 °C circulant à la même vitesse (Viscosité cinématique 110.10^{-6} m²/s).
- 3) Du fuel lourd à 10 °C circulant à la même vitesse (Viscosité cinématique 290.10^{-6} m²/s).

Réponse :

1- On calcule le nombre de Reynolds : $Re = \frac{V.D}{\nu}$

A.N : $Re = \frac{10,5.0,03}{10^{-6}} = 315000 > 100000$ donc l'écoulement est turbulent rugueux.

2- $Re = \frac{10,5.0,03}{110.10^{-6}} = 2863$ Puisque $2000 < Re < 100000$ donc l'écoulement est turbulent lisse

3- $Re = \frac{10,5.0,03}{290.10^{-6}} = 1086$ Puisque $Re < 2000$ donc l'écoulement est laminaire.

Exercice N°2 :

Du fuel lourd de viscosité dynamique $\mu = 0,11$ Pa.s et de densité $d=0,932$ circule dans un tuyau de longueur $L=1650$ m et de diamètre $D=25$ cm à un débit volumique $q_v=19,7$ l/s.

On donne la masse volumique de l'eau $\rho_{eau} = 1000$ kg /m³.

Travail demandé :

- 1) Déterminer la viscosité cinématique ν du fuel.
- 2) Calculer la vitesse d'écoulement V .
- 3) Calculer le nombre de Reynolds Re .
- 4) En déduire la nature de l'écoulement.
- 5) Déterminer le coefficient λ de pertes de charge linéaire.
- 6) Calculer la perte de charge J_L dans le tuyau.

Réponse :

1) Viscosité cinématique : $\nu = \frac{\mu}{\rho} = \frac{\mu}{d.\rho_{eau}}$ A.N : $\nu = \frac{0,11}{1000.0,932} = 118.10^{-6}$ m²/s

2) Vitesse d'écoulement : $V = \frac{4.q_v}{\pi.D^2}$ A.N $V = \frac{4.19,7.10^{-3}}{\pi.0,25^2} = 0,4013$ m/s

3) Nombre de Reynolds : $Re = \frac{V.D}{\nu}$ A.N $Re = \frac{0,4013.0,25}{118.10^{-6}} = 850,222$

4) $Re < 2000$ donc l'écoulement est laminaire.

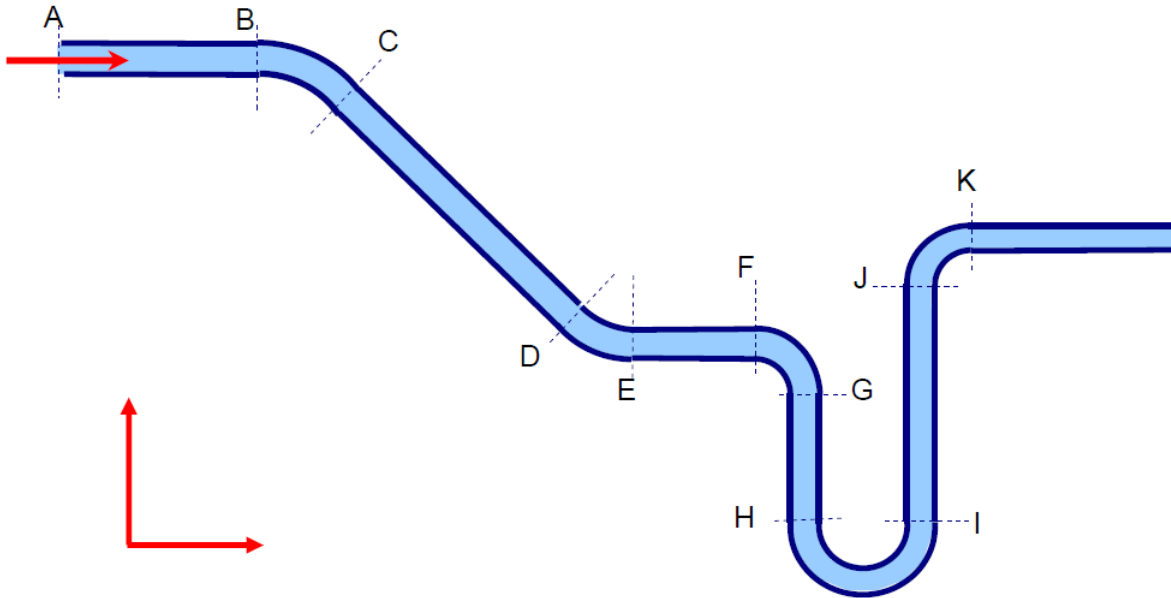
5) Formule de poiseuille : $\lambda = \frac{64}{Re}$ A.N $\lambda = \frac{64}{850,222} = 0,075$

6) Perte de charge linéaire : $J_L = -\lambda \frac{V^2}{2} \left(\frac{L}{D} \right)$ A.N :

$$J_L = -0,075 \left(\frac{0,4013^2}{2} \right) \frac{1650}{0,25} = -40 \text{ J/kg}$$

Exercice N°3 :

De l'huile ayant une viscosité dynamique $\mu = 0,7 \text{ Pa.s}$ et une densité $d=0,896$ est pompée d'un point A vers un point L.



Elle circule dans une canalisation de diamètre $d=100 \text{ mm}$ formée des six tronçons rectilignes suivants:

- AB de longueur 6 m,
- BC de longueur 12 m,
- CD de longueur 5 m,
- DE de longueur 4 m,
- EF de longueur 7 m,
- FG de longueur 8 m.

La canalisation est équipée :

- de deux coudes à 45° : BC, DE : ayant chacun un coefficient de perte de charge $K_{\text{coude}45}=0,2$,
- de deux coudes à 90° : FG et JK : ayant chacun un coefficient de perte de charge $K_{\text{coude}90}=0,3$,
- d'un coude à 180° HI: ayant un coefficient de perte de charge $K_{\text{coude}180}=0,4$,

La pression d'entrée est $P_A=3 \text{ bars}$.

La conduite est supposée horizontale et transporte un débit volumique $q_v=2.5 \text{ l/s}$.

Travail demandé :

- 1) Calculer la vitesse d'écoulement V en m/s.
- 2) Calculer le nombre de Reynolds.
- 3) Il s'agit d'un écoulement laminaire ou turbulent ?
- 4) Déterminer le coefficient de perte de charges linéaire λ .
- 5) Calculer les pertes de charges linéaires $\Delta P_{\text{linéaire}}$.
- 6) Calculer les pertes de charges singulières $\Delta P_{\text{singulière}}$.
- 7) Déterminer la pression de sortie PL.
- 8) Quelle sera la pression de sortie PL' si le débit volumique Q_v atteint 5 L/s .

Réponse :

- 1) Vitesse d'écoulement V : $V = \frac{4 \cdot q_v}{\pi \cdot D^2}$ A.N $V = \frac{4 \cdot 2,5 \cdot 10^{-3}}{\pi \cdot 0,1^2} = 0,318 \text{ m/s}$
- 2) Nombre de Reynolds : $Re = \frac{V \cdot d}{\frac{\mu}{\rho}}$ A.N $Re = \frac{0,318 \cdot 0,1}{\frac{0,7}{896}} = 40,7$
- 3) $Re < 2000$: il s'agit d'un écoulement laminaire.
- 4) Formule de Poiseuille : $\lambda = \frac{64}{Re}$ A.N $\lambda = \frac{64}{40,7} = 1,57$
- 5) $\Delta P_{linéaire} = -\lambda \cdot \rho \frac{V^2}{2} \cdot \frac{L}{d}$ A.N $\Delta P_{linéaire} = -1,57 \cdot 896 \cdot \frac{0,318^2}{2} \left(\frac{42}{0,1} \right) = -29873,16 \text{ Pa}$
- 6) $\Delta P_{singulière} = -K_s \cdot \rho \cdot \frac{V^2}{2}$ A.N $\Delta P_{singulière} = (-2,0,2 + 2,0,3 + 0,4) \cdot 896 \cdot \frac{0,318^2}{2} = -63,42 \text{ Pa}$
- 7) Pression de sortie PL :
- 8) $P_L = P_A + \Delta P_{linéaire} + \Delta P_{singulière}$ A.N $P_L = 8 - 0,29873 - 0,00063 = 7,7 \text{ bar}$
- 8) $P'_L = P_L - 4 \cdot (0,29873 + 0,00063)$ A.N $P'_L = 8 - 4 \cdot (0,29873 + 0,00063) = 6,8 \text{ bar}$

Chapitre 6 : Dynamique des fluides visqueux (réels)

6-1- Introduction :

Nous avons vu que dans un fluide parfait, la contrainte qui s'exerce sur une particule de fluide est toujours perpendiculaire aux parois de celle-ci. Dans un fluide réel en écoulement, la contrainte possède une composante tangentielle dite contrainte visqueuse

6-2- Fluides Newtoniens et Non-Newtoniens

6-2-1- Fluides Newtoniens

Les fluides newtoniens sont des fluides qui suivent les propriétés physiques du physicien Newton. Ces propriétés disent que la viscosité (rapport contrainte de cisaillement et l'augmentation de la vitesse de déformation) est le coefficient de proportionnalité liant la contrainte de cisaillement à l'augmentation de la vitesse de déformation. La vitesse de déformation est donc proportionnelle à la force appliquée. Lorsque que l'on fait un graphique on obtient une droite linéaire.

En outre, lorsqu'un fluide est newtonien cela veut dire que le fluide continue de s'écouler indépendamment des forces qui agissent sur lui. C'est le cas de la plupart des fluides existants, comme par exemple l'eau, à l'état liquide qui peu importe la contrainte qu'on applique à celui-ci (agiter, donner un coup, ...), le comportement ne change pas, l'eau reste au même état et continuera de couler tant qu'aucun autre facteur (température, pression ...) n'entre en jeu [17].

Expérience de Couette.

Considérons un fluide enfermé entre deux cylindres, l'un mobile, l'autre fixé via un fil de torsion. On constate que lorsque la cavité cylindrique extérieure est mise en rotation à la vitesse angulaire ω , le cylindre intérieur tourne d'un angle α par rapport à sa position d'équilibre. Analysons en détail le phénomène [18].

- La torsion du fil conduit à l'existence d'un couple dont les forces de pression ne peuvent pas être responsables. On est donc obligé d'admettre l'existence d'efforts tangentiels.
- On observe que les particules de fluide adhèrent aux parois. Il existe donc un gradient de vitesse au sein de l'écoulement.
- Pour les fluides simples, l'angle α augmente proportionnellement à ω . Les efforts tangentiels augmentent donc proportionnellement au gradient de vitesse.

L'expérience montre que, lors de l'écoulement d'un fluide, la pression ne suffit pas à expliquer les phénomènes et qu'il convient d'introduire des forces tangentielles qui s'opposent au mouvement du fluide. Ces forces, de type frottement, dues aux interactions entre molécules du fluide, sont appelées forces de viscosité. La contrainte (force par unité de surface) $\vec{\sigma}$ qu'exerce une couche de fluide supérieure sur un élément de surface d'une couche de fluide inférieure [19], s'écrit :

$$\vec{\sigma}_{1 \rightarrow 2} = \frac{d\vec{F}}{dS} = \sigma_n \vec{n} + \sigma_t \vec{t} \quad \text{avec} \quad \sigma_n = -p \quad (6.1)$$

Fluide newtonien — Entre deux couches successives de fluide en écoulement unidimensionnel à la vitesse \vec{v} , il existe des contraintes tangentielles à l'écoulement qui accélèrent la couche la plus lente et ralentissent la couche la plus rapide. Par définition d'un fluide newtonien, les forces visqueuses sont proportionnelles à la différence de vitesse c'est-à-dire au gradient de vitesse.

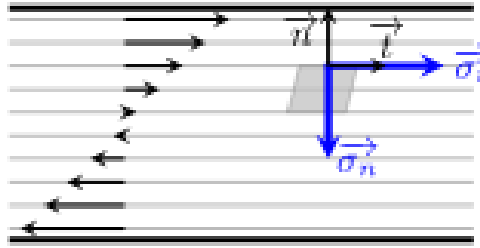


Figure 6-1 Contraintes internes dans le fluide.

$$\sigma_t = \eta \frac{\partial v}{\partial n} = \eta \dot{\gamma} \quad (6.2)$$

Où $\partial v / \partial n$ désigne le gradient de vitesse dans la direction normale à la surface. De manière générale, la contrainte visqueuse varie comme la vitesse de cisaillement $\dot{\gamma}$. La constante de proportionnalité η est caractéristique du fluide et désigne la viscosité dynamique du fluide [20].

6-2-2- Fluides Non-Newtoniens

Le comportement newtonien ($\sigma = \eta \dot{\gamma}$) s'observe :

- Dans tous les gaz ;
- Dans les liquides simples constitués de petites molécules (l'eau par exemple) ;
- Dans les solutions contenant des ions ou molécules à symétrie sphérique.

Cependant la rhéologie montre qu'il existe des fluides pour lesquels la relation entre contrainte tangentielle et cisaillement est plus complexe. Certains fluides vérifient la relation

$$\sigma = \eta(\dot{\gamma}) \dot{\gamma} \quad (6.3)$$

Où $\eta(\dot{\gamma})$ représente une viscosité apparente. Lorsque $\eta(\dot{\gamma})$ diminue avec $\dot{\gamma}$, le fluide coule d'autant plus facilement qu'il est cisailé. On parle alors de fluide rhéofluidifiant (sang, polymère fondu, etc.). Le comportement inverse est désigné par le terme rhéoépaississant (amidon + eau). Il existe également des liquides, comme les peintures, qui ne coulent que si la contrainte dépasse une valeur seuil [21].

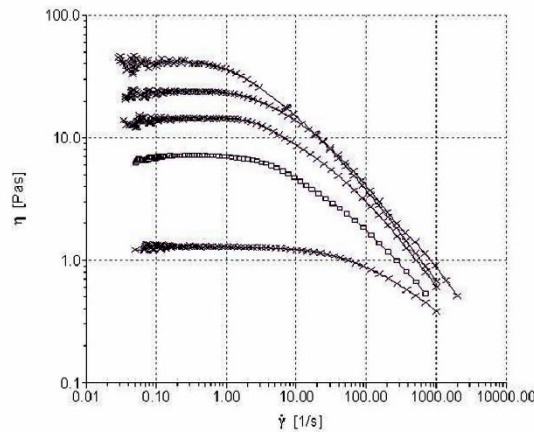


Figure 6-2 Mesures de la viscosité de polysaccharides de différentes masses moléculaires en solution aqueuse à 3% en masse

Comportement visco-élastique — Tout fluide se caractérise par un temps de relaxation viscoélastique τ_{ve} . Lorsqu'un fluide est soumis à une contrainte, on distingue trois types de comportement en fonction du temps d'observation.

- Si $t \ll \tau_{ve}$, le fluide adopte un comportement élastique (déformation proportionnelle à la contrainte) ;
- Si $t \gg \tau_{ve}$ le fluide adopte un comportement visqueux (vitesse de cisaillement proportionnelle à la contrainte $\sigma = \eta \dot{\gamma}$;
- Si $t \approx \tau_{ve}$, le comportement est alors plus complexe ; il est dit visco-élastique.

C'est pourquoi, du point de vue mécanique, la distinction entre un solide et un liquide est artificielle. Ce que l'on appelle communément un liquide est un fluide de petit temps de relaxation ($\tau_{ve} = 1\text{ns}$ pour l'eau) et ce que l'on appelle un solide peut être vu comme un fluide de grand temps de relaxation ($\tau_{ve} = 10^6\text{ans}$ pour le manteau de la croûte terrestre). τ_{ve} dépend fortement de la température ce qui confère à certains systèmes un comportement fluide ou solide suivant la température (bitume par exemple).

Un exemple de fluide viscoélastique est la pâte de silicone connue sous le nom de “silly-putty”. Une boule de “silly-putty” rebondit sur le sol comme une balle élastique (aux temps courts) mais s'étale comme un fluide visqueux (aux temps longs) si on la pose sur une surface horizontale [22].

6-3- Equation intégrale du mouvement

Lorsque le fluide est newtonien et incompressible, les équations de Newton appliquées à chaque particule de fluide prennent la forme des équations de Navier-Stokes.

6-3-1- Bilan des forces

Plaçons nous dans un référentiel galiléen et effectuons un bilan des forces sur une particule de fluide située en M à l'instant t , de masse $dm = \rho(M, t)d\tau$. En plus des forces de pression et des forces extérieures volumiques, il faut ajouter la résultante des forces visqueuses :

$$d\vec{F} = \left(\overline{f_v^{ext}} - \vec{\nabla} p \right) d\tau + d\vec{F}_\eta \quad (6.4)$$

L'expression de $d\vec{F}_\eta$ est en général assez compliquée mais elle se simplifie dans le cas des fluides newtoniens et incompressibles.

Cas d'un écoulement parallèle unidimensionnel — Calculons la résultante des forces visqueuses dans le cas particulier simple d'un écoulement suivant (Ox) avec un gradient de vitesse suivant (Oy) :

$$\vec{v} = v(y)\vec{u}_x \quad (6.5)$$

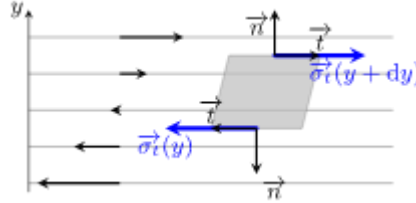


Figure 6-3 Bilan des forces de viscosité sur un élément de fluide.

On remarque ici que $\text{div } \vec{v} = 0$. L'écoulement est donc bien incompressible. Dans ce cas, la résultante des forces visqueuses s'exerçant sur une particule de fluide, s'écrit :

$$d\vec{F}_\eta = \eta \left[\frac{dv}{dy}(y + dy) - \frac{dv}{dy}(y) \right] dx dz \vec{u}_x = \eta \frac{d^2 v}{dy^2} d\tau \quad (6.6)$$

On voit apparaître une force volumique qui s'exprime comme le Laplacien de la vitesse. Cette formule obtenue dans un cas particulier se généralise aux écoulements incompressibles des fluides newtoniens [23]. On admettra que pour un fluide newtonien incompressible, la résultante des forces visqueuses s'écrit :

$$d\vec{F}_\eta = \eta \Delta \vec{v} d\tau \quad (6.7)$$

où Δ est l'opérateur laplacien

6-4- Equation de Navier-Stokes

D'après la seconde loi de Newton appliquée à une particule de fluide, on a :

$$\rho d\tau \frac{D\vec{v}}{Dt} = -\vec{\nabla} p d\tau + \vec{f}_{v,ext} d\tau + d\vec{F}_\eta \quad (6.8)$$

En divisant par $d\tau$, on obtient l'équation de Navier-Stokes.

Équation de Navier-Stokes

Pour un fluide incompressible newtonien, la dynamique de l'écoulement vérifie l'équation

$$\rho \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} \right] = -\vec{\nabla} p + \vec{f}_{v,ext} + \eta \Delta \vec{v} \quad (6.9)$$

APPLICATIONS :

Exercice N°1 :

Le champ des vitesses d'un écoulement est donné par :

$$\vec{V} = (4 + xy + 2t)\vec{i} + 6x^3\vec{j} + (3xt^2 + z)\vec{k}$$

Déterminer :

- 1- L'accélération particulaire (matérielle) du fluide ;
- 2- L'accélération matérielle au point A (1, 1, 1) et à $t = 1$.

Réponse :

1. L'accélération particulaire est donnée par les équations suivantes :

$$a_x = \frac{DU}{Dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z}$$

$$a_y = \frac{DV}{Dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z}$$

$$a_z = \frac{DW}{Dt} = \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z}$$

D'après le champ de vitesse donné, on a :

$$u = 4 + xy + 2t$$

$$v = 6x^3$$

$$w = 3xt^2 + z$$

Donc :

$$a_x = 2 + (4 + xy + 2t)(y) + 6x^3(x) + (3xt^2 + z)(0)$$

$$a_y = 0 + (4 + xy + 2t)(18x^2) + 6x^3(0) + (3xt^2 + z)(0)$$

$$a_z = 6xt + (4 + xy + 2t)(3t^2) + 6x^3(0) + (3xt^2 + z)(1)$$

Alors :

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$$

$$\vec{a} = (2 + 4y + xy^2 + 2ty + 6x^4)\vec{i} + (72x^2 + 18x^3y + 36tx^2)\vec{j} + (6xt + 12t^2 + 3xyt^2 + 6t^3 + 2 + 3xt^2)\vec{k}$$

2. Le vecteur d'accélération au point A (1, 1, 1) et t = 1

$$\vec{a} = (2 + 4 + 1 + 2 + 6)\vec{i} + (72 + 18 + 36)\vec{j} + (6 + 12 + 3 + 6 + 2 + 3)\vec{k}$$

$$\vec{a} = 15\vec{i} + 126\vec{j} + 32\vec{k}$$

Exercice N°2 :

On considère un écoulement bidimensionnel d'un fluide incompressible caractérisé par :

$$c_1 = (2x - 3y)t, \quad c_2 = (3x - \alpha y)t$$

Déterminer α pour que l'équation de continuité soit satisfaite

Réponse :

L'équation de continuité s'écrit dans un fluide incompressible ($\rho = \text{cst}$)

$$\frac{\partial c_1}{\partial x} + \frac{\partial c_2}{\partial y} = 0$$
$$\frac{\partial c_1}{\partial x} = 2t \quad \frac{\partial c_2}{\partial y} = -\alpha t \quad \Rightarrow \quad \alpha = 2$$

Chapitre 7 : introduction à la dynamique des gaz

7-1- Introduction

Dans ce dernier chapitre, nous abordons les fluides compressibles qui présentent certaines particularités. La masse volumique d'un gaz varie avec sa pression. L'étude de l'écoulement d'un fluide compressible devient plus compliquée que celle d'un fluide incompressible. En effet, les variations de température ou de pression qui peuvent apparaître dans l'écoulement d'un liquide ne modifient en rien les volumes mis en jeu car la dilatation ou la compression sont généralement négligeables. En revanche, ces phénomènes prennent une grande importance lorsqu'il s'agit de vapeurs ou de gaz.

L'étude de l'écoulement des fluides compressible ne peut être abordée sans avoir fixé au préalable un certain nombre d'hypothèses simplificatrices (nature du gaz : parfait, type d'évolution : isotherme ou adiabatique,...etc).

7-2- Equation d'état d'un gaz parfait

7-2-1 Lois des gaz parfaits

$$\frac{p}{\rho} = r \cdot T \quad (7.1)$$

avec :

- P : pression.
- ρ : masse volumique en (kg/m³).
- r : constante des gaz parfait ($r = \frac{R}{M} = 287 \text{ J/Kg.K}$)
- T : température en (K).

7-2-2 Transformations thermodynamiques

- Transformation à pression constante :

La chaleur récupérée par un gaz parfait à pression constante est :

$$\Delta H = C_p \cdot \Delta T \quad (7.2)$$

avec :

- ΔH : variation d'enthalpie par unité de masse en (KJ/Kg)
- C_p : chaleur spécifique à pression constante en (KJ/Kg. K)
- ΔT : variation de température (K)

- Transformation à volume constant :

La chaleur récupérée par un gaz parfait à volume constant est :

$$\Delta U = C_v \cdot \Delta T \quad (7.3)$$

avec :

- ΔU : variation d'énergie interne par unité de masse en (KJ/Kg)
- C_v : chaleur spécifique à volume constant en (KJ/Kg. K)

- ΔT : variation de température en (K)

Remarque :

$$H = U + \frac{p}{\rho} \Rightarrow \Delta H = \Delta \left(U + \frac{p}{\rho} \right) = \Delta U + \Delta(rT) = (C_V + r) \cdot \Delta T = C_p \cdot \Delta T \quad (7.4)$$

Donc : $C_p = C_V + r$: relation de Mayer

On définit : $\gamma = \frac{C_p}{C_V}$

- Transformation adiabatique :

$$\frac{p}{\rho^\gamma} = Cte, \text{ D'après la loi des gaz parfaits : } \frac{p}{\left(\frac{p}{rT}\right)^\gamma} = Cte \text{ donc : } \frac{p^{\gamma-1}}{r^\gamma} = Cte$$

7-3- Classification des écoulements

7-3-1- Célérité du son

Pour un écoulement isentropique, la vitesse du son, appelée également célérité du son, est donnée par l'expression suivante :

$$C = \sqrt{\frac{\gamma \cdot p}{\rho}} = \sqrt{\gamma \cdot r \cdot T} \quad (7.5)$$

7-3-2- Nombre de Mach

On appelle nombre de Mach le rapport :

$$M = \frac{V}{C} \quad (7.6)$$

- V : Vitesse d'écoulement en (m/s)

- C : Célérité du son en (m/s)

Le nombre de Mach varie d'un point à l'autre de l'écoulement, non seulement parce que la vitesse varie, mais aussi parce que l'état du fluide varie, donc la célérité.

Ecoulement subsonique

L'écoulement est dit subsonique si la vitesse d'écoulement est inférieure à la vitesse du son.
Ou encore : si $M < 1$

Ecoulement supersonique

L'écoulement est dit subsonique si la vitesse d'écoulement est supérieure à la vitesse du son.
Ou encore : si $M > 1$

7-4- Equation de continuité

L'équation de continuité d'un fluide compressible est :

$$\rho \cdot S_1 \cdot V_1 = \rho \cdot S_2 \cdot V_2 \quad (7.7)$$

7-5- Equation de St-VENANT

L'équation de bilan énergétique d'un système ouvert est :

$$\Delta E_C + \Delta E_P + \Delta H = Q + W_u \quad (7.8)$$

où

- ΔE_C : Variation d'énergie cinétique.
- ΔE_P : Variation d'énergie potentielle du fluide.
- ΔH : Variation d'enthalpie.
- Q : chaleur échangée avec le milieu extérieur.
- W_u : travail utile échangé.

Si on suppose :

- qu'il n'y pas d'échange de travail utile, $W_u = 0$
- que l'énergie potentielle est négligeable, $\Delta E_P = 0$
- que l'écoulement est adiabatique et réversible, $Q = 0$

L'équation de bilan énergétique devient : $\Delta E_C + \Delta H = 0$

Ou encore : $(H_2 - H_1) + \frac{1}{2} (V_2^2 - V_1^2) = 0$

Donc $H + \frac{1}{2} V^2 = \text{Cte}$

$$H = C_p \cdot T = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{P}{\rho}$$

D'où la relation de St VENANT :

$$\frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{P}{\rho} + \frac{1}{2} V^2 = \text{Cte}$$

Entre deux points d'écoulement, cette relation s'écrit :

$$\frac{\gamma}{\gamma - 1} \left(\frac{P_2}{\rho_2} - \frac{P_1}{\rho_1} \right) + \frac{1}{2} (V_2^2 - V_1^2) = 0 \quad (7.9)$$

Or pour un gaz parfait : $\frac{P_1}{\rho_1^\gamma} = \frac{P_2}{\rho_2^\gamma} = Cte$

donc :

$$\frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{P_1}{\rho_1} \left(\left(\frac{P_2}{P_1} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right) + \frac{1}{2} (V_2^2 - V_1^2) = 0 \quad (7.10)$$

7-6- Ecoulement dans un convergent-divergent.

Un gaz de pression p_0 , densité ρ_0 et de température T_0 s'écoule isentropiquement depuis un réservoir de grandes dimensions ($V_0 \approx 0$) à travers une tuyère convergente (figure suivante) vers un compartiment de décharge où règne la pression en aval p_b inférieure à p_0 . Adoptons que la pression et la vitesse de sortie p_e et V , d'après la formule de Saint Venant :

$$V = \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1} \frac{P_0}{\rho_0} \left[1 - \left(\frac{P_e}{P_0} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right]} \quad (7.11)$$

et $\dot{m} = \rho VA$ on étudie les différents états de l'écoulement dans la tuyère convergente en changeant la pression en aval p_b à diverses valeurs modérées.

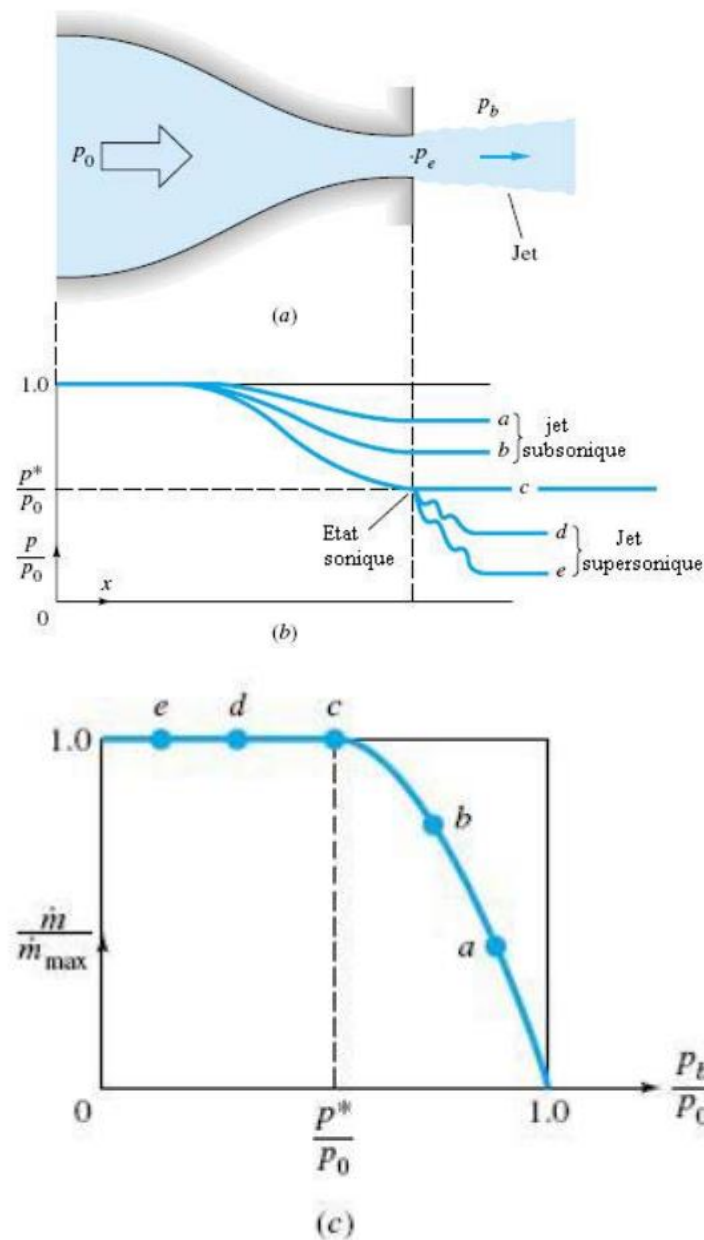


Figure 7-1 Tuyère convergente : (a) Géométrie et pressions caractéristiques de la tuyère ; (b) distribution des pressions causée par divers pressions aval p_b ; (c) débit massique.

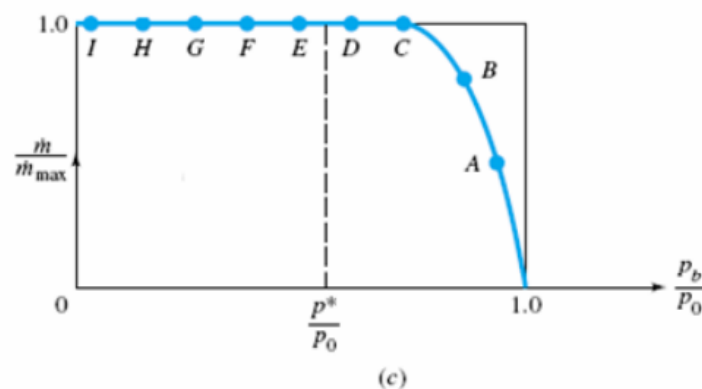
- Si on considère des valeurs de p_b comme dans le cas a et b (figure 7-1), la pression au col est supérieure à la pression critique p^* . L'écoulement au sein de la tuyère convergente est subsonique et jet sort à la pression $p_e = p_b$. Le débit massique de l'écoulement isentropique subsonique est inférieur à la valeur critique \dot{m}_{\max} (figure 7-1 c).

- Si la pression p_b est égale à p^* (le cas *c*) au col. L'écoulement au col sera sonique, et le jet aussi ($p_e = p_b$), et le débit massique de l'écoulement sera maximal. L'écoulement en amont du col est subsonique.
- Finalement, si p_b est diminuée au-dessus de p^* , comme les cas *d* et *e*, la tuyère ne peut répondre plus puisqu'elle est suffoquée à sa valeur maximum du débit massique. Le col reste sonique avec $p_e = p^*$, et la distribution de la pression dans la tuyère est la même que celle dans le cas *c*. le jet s'étend de façon supersonique en réduisant sa pression de sa valeur critique p^* (au col) à la pression p_b .

7-6-1- Tuyère convergente-divergente :

Une tuyère convergente-divergente (aussi appelée tuyère de Laval) est représentée dans la figure (7-2 a). Si la pression en aval p_b est suffisamment faible, il existera un écoulement supersonique dans la portion divergente de la tuyère aussi qu'une variété de conditions de choc pourra exister.

- Pour les cas A et B (figure 7-2 b), la pression p_b n'est pas suffisamment faible pour induire un écoulement sonique au col, et l'écoulement est subsonique à travers l'ensemble de la tuyère (convergente-divergente). La distribution de pression est calculée d'après les relations isentropiques déjà établies. La pression de sortie est $p_e = p_b$ et le jet est subsonique.
- Pour le cas C, le rapport des sections e col $\frac{A_e}{A_{col}}$ est exactement égal à $\frac{A_e}{A^*}$ pour un nombre de Mach subsonique à la sortie. Le col devient sonique, et le débit massique atteint son maximum (figure 7-2 c). L'écoulement dans le reste de la tuyère est subsonique, le jet inclus et $p_e = p_b$.
- Cette fois, considérons le cas H. ici p_b est tel que $\frac{p_b}{p_0}$ correspond exactement au rapport $\frac{A_e}{A^*}$ d'un nombre de Mach supersonique à la sortie. L'écoulement dans le divergent est entièrement supersonique, y compris le jet et $p_e = p_b$.



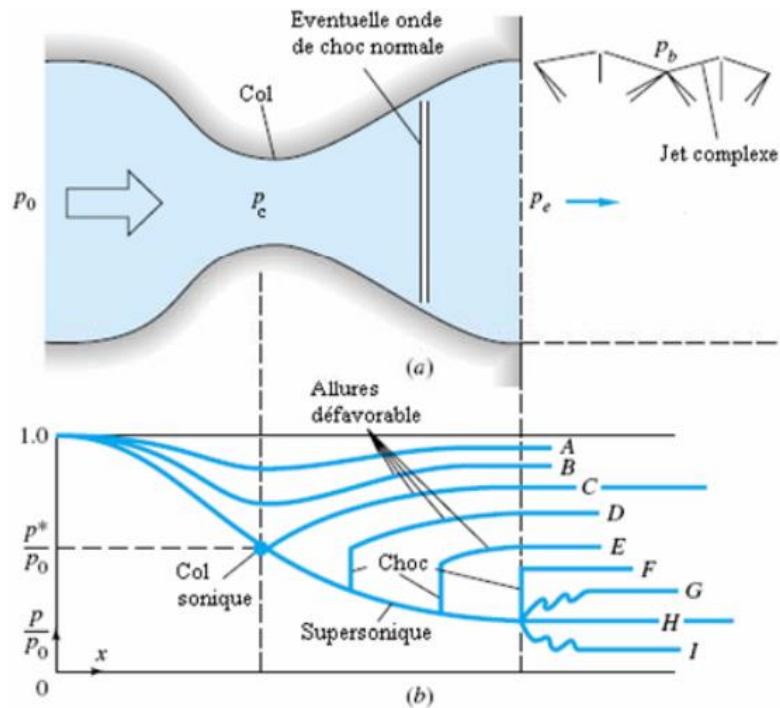


Figure 7-2 Tuyère convergente-divergente : (a) Géométrie de la tuyère et configurations possibles; (b) distribution des pressions causée par divers pressions aval p_b ; (c) débit massique.

- Supposons dans ce cas que p_b se trouve entre les cas C et H, qui est impossible d'après les relations de l'écoulement isentropique. Alors, les pressions p_b des cas D à F ont lieu (figure 7-2 b). Le col reste suffoqué à la valeur sonique. Le débit massique garde sa valeur maximale (figure 7-2 c). A la pression en aval du cas F l'onde de choc normale apparaîtra à la sortie de la tuyère. Dans le cas G, l'écoulement présentera des séries complexes d'ondes de choc obliques jusqu'il atteint la pression p_b .
- Finalement dans le cas I, p_b est inférieure à celle du cas H, mais la tuyère est suffoquée et ne répond plus. L'écoulement à la sortie s'étend en de complexes séries d'ondes supersoniques.

7-7- Ondes de choc normales :

Un phénomène irréversible commun aura lieu dans les écoulements supersoniques que ces soient internes ou externes, qui est l'onde de choc normale. C'est une très mince onde (d'épaisseur de quelques microns) de discontinuité dans les propriétés de l'écoulement. Puisque l'état du gaz change adiabatiquement, une augmentation de la température statique s'accompagne d'une augmentation de la pression (figure 7-3 a), la face arrière de l'onde de compression ayant une température plus grande, se propage plus rapidement que la face frontale de l'onde (figure 7-3 b), ces deux faces de l'onde se combinent en une mince discontinuité de la pression. Les ondes de choc sont associées avec nécessairement d'une augmentation de la pression et pas d'une réduction

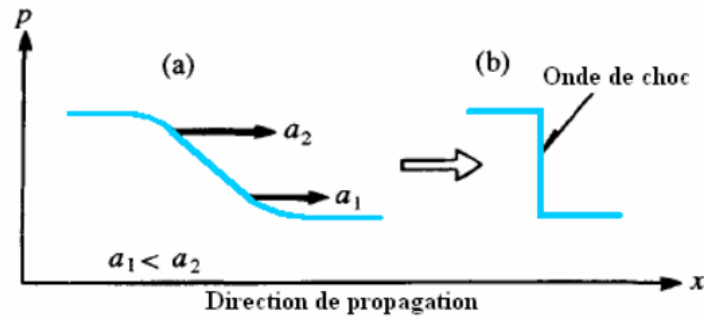


Figure 7-3 : Propagation d'une onde de compression

Puisqu'une onde de choc est essentiellement différente d'une onde sonore à cause de l'intense changement de la pression, la vitesse de propagation du choc est plus élevée que celle du son, et la hausse de la pression l'est aussi.

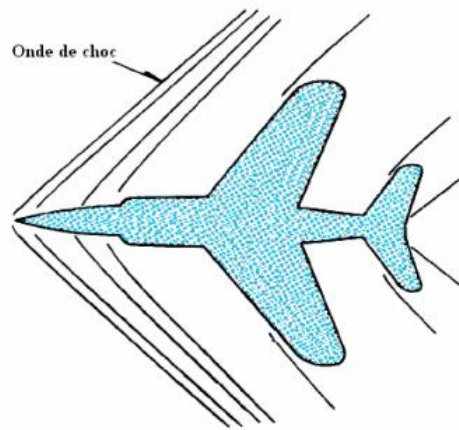


Figure 7-4 : Avion à réaction volant à vitesse supersonique.

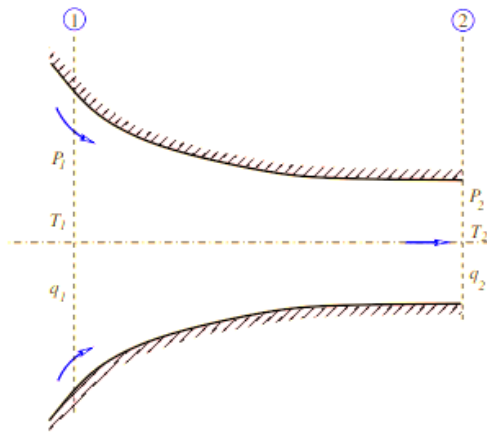
Les ondes de choc se remarquent par exemple après une explosion, l'éjection des gaz brûlés à travers une tuyère d'échappement ou quand un avion ou un projectile vole à une vitesse supersonique (figures 7-4)

APPLICATIONS

Exercice N°1 :

Soit un écoulement d'air à travers une section variable. Les mesures donnent : $P_1 = 80 \text{ kPa}$; $t_1 = 5 \text{ °C}$; $q_1 = 150 \text{ m/s}$.

En supposant l'écoulement incompressible, calculer q_2 et P_2 si $A_2 = A_1/2$. Discuter la validité de l'hypothèse d'incompressibilité de l'écoulement dans cette situation



Réponse :

L'équation de continuité nous donne :

$$\rho q_1 A_1 = \rho q_2 A_2 \Rightarrow q_1 A_1 = \frac{1}{2} q_2 A_1 \Rightarrow q_2 = 2q_1 = 30 \text{ m/s}$$

L'équation de Bernoulli nous donne :

$$P_1 + \frac{1}{2} \rho q_1^2 + \rho g z_1 = P_2 + \frac{1}{2} \rho q_2^2 + \rho g z_2 \Rightarrow P_2 = P_1 + \frac{1}{2} \rho (q_1^2 - q_2^2)$$

Pour déterminer ρ , on fait appel à l'équation d'état :

$$P_1 = \rho R T_1 \Rightarrow \rho = \frac{P_1}{R T_1} = \frac{80 \cdot 10^3}{287 \cdot 278} = 1003 \text{ kg/m}^3$$

$$\Rightarrow P_2 = 80 \cdot 10^3 + \frac{1}{2} 1003 (150^2 - 300^2) \Rightarrow P_2 = 46,15 \text{ kPa}$$

L'écoulement est considéré comme incompressible si $\Delta T \approx 0 \Rightarrow T_2 = T_1$

$$\rho_2 = \frac{P_2}{R T_2} = \frac{46,15 \cdot 10^3}{287 \cdot 278} = 0,578 \text{ kg/m}^3$$

L'erreur relative sur la masse volumique est d'environ 42.37 %. Ce qui signifie que l'hypothèse de fluide incompressible n'est pas justifiée.

Exercice N°2 :

Un avion vole à un nombre de Mach $M = 0,95$ et à une altitude où la pression atmosphérique est $P_{\text{atm}} = 0,2332 \text{ bar}$ et la masse volumique $\rho = 0,349 \text{ Kg/m}^3$.

1) Calculer la vitesse de l'avion en Km/h.

2) Calculer la pression et la température du point d'arrêt sur le bord d'attaque de l'aile. L'air est assimilé à un gaz parfait : $\gamma = 1,4$ et $r = 287 \text{ J/kg.K}$

Réponse :

$$1) V = M \cdot C = M \sqrt{\frac{\gamma \cdot P}{\rho}} \quad \text{A.N } V = 290,56 \text{ m/s} = 1046,02 \text{ Km/h}$$

$$2) P_1 = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} \cdot M^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \cdot P \quad \text{A.N } P_1 = \left(1 + \frac{1,4-1}{2} \cdot 0,95^2\right)^{\frac{1,4}{1,4-1}} \cdot 0,2332 = 0,416 \text{ bar}$$

$$T_1 = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} \cdot M^2\right) \cdot T \quad \text{Or} \quad r \cdot T = \frac{p}{\rho} \quad (\text{air considéré gaz parfait})$$

$$\Rightarrow T = \frac{p}{\rho \cdot r} = \frac{0,2332}{0,234 \cdot 287} = 232,87^\circ K \quad \text{donc} \quad T_1 = \left(1 + \frac{1,4-1}{2} \cdot 0,95^2\right) \cdot 232,87 = 274,84^\circ K$$

Exercice N°3 :

Un corps céleste en chute libre, freiné par les couches d'air de la haute atmosphère tombe sur terre. A une altitude de 10 km :

- la vitesse du corps $V=3000$ m/s,
- la température de l'air $T=223^\circ K$,
- la masse volumique de l'air $\rho = 0,412$ Kg/m³
- la pression de l'air $P=0,265$ bar. On donne $\gamma = 1,4$

Travail demandé :

- 1)Calculer la vitesse du son C.
- 2)Déterminer le nombre de Mach M.
- 3)Quelle est la nature de l'écoulement d'air autour du corps ?
- 4)Appliquer le théorème de Saint-Venant pour calculer la température T_i et la pression P_i de l'air au point d'arrêt.

Réponse :

$$1) \text{ Célérité du son } C = \sqrt{\gamma \frac{P}{\rho}} \quad \text{A.N} \quad C = \sqrt{1,4 \frac{26500}{0,412}} = 300 \text{ m/s}$$

$$2) \text{ Nombre de Mach : } M = \frac{V}{C} \quad \text{A.N} \quad M = \frac{3000}{300} = 10$$

3) $M > 1$ donc l'écoulement est supersonique

4) Température d'arrêt

$$T_1 = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} \cdot M^2\right) \cdot T \quad \text{A.N} \quad T_1 = \left(1 + \frac{1,4-1}{2} \cdot 10^2\right) \cdot 233 = 4683^\circ K$$

5) pression d'arrêt

$$P_1 = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} \cdot M^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \cdot P \quad \text{A.N} \quad P_1 = \left(1 + \frac{1,4-1}{2} \cdot 10^2\right)^{\frac{1,4}{1,4-1}} \cdot 26500 = 11246 \text{ Pa}$$

Exercice N°4:

L'azote est comprimé dans une bouteille dans laquelle règne une pression d'arrêt $P_i = 3$ bar. Il s'échappe à travers un orifice vers l'extérieur où la pression ambiante est $P = 1$ bar. On donne $\gamma = 1,4$

1) En appliquant l'équation de Saint-Venant, déterminer le nombre de Mach M .

2) Préciser la nature de l'écoulement.

Réponse :

1) Théorème de Saint-Venant $1 + \frac{\gamma-1}{2} \cdot M^2 = \left(\frac{P_1}{P}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$

Nombre de Mach : $M = \sqrt{\frac{2}{\gamma-1} \left[\left(\frac{P_1}{P}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right]}$ A.N $M = \sqrt{\frac{2}{1,4-1} \left[\left(\frac{3}{P_1}\right)^{\frac{1,4-1}{1,4}} - 1 \right]} = 1,357$

2) $M > 1$ donc l'écoulement est supersonique

